

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Предисловие	5
Глава 1. Виды и особенности нелинейных систем . .	7
§ 1.1. Виды нелинейностей	7
§ 1.2. Фазовое пространство и фазовая плоскость . .	13
§ 1.3. Типы особых точек и фазовые портреты линейных систем	18
§ 1.4. Особые точки и фазовые портреты нелинейных систем	26
Глава 2. Изображение переходных процессов на фазовой плоскости	33
§ 2.1. Переходные процессы и автоколебания релейной системы	33
§ 2.2. Система со скользящим процессом	38
§ 2.3. Система с логическим управлением. Учет временного запаздывания	41
§ 2.4. Системы с переменной структурой	48
Глава 3. Методы припасовывания и точечного преобразования	52
§ 3.1. Метод припасовывания	52
§ 3.2. Метод точечного преобразования	57
§ 3.3. Примеры точечного преобразования	62
Глава 4. Автоколебания в системах высокого порядка	70
§ 4.1. Исходные положения метода гармонической линеаризации	70
§ 4.2. Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации	76
§ 4.3. Алгебраический способ определения симметричных автоколебаний и устойчивости	86
§ 4.4. Частотный способ определения симметричных автоколебаний	97
§ 4.5. Несимметричные автоколебания. Постоянные ошибки	104
Глава 5. Исследование устойчивости нелинейных систем	112
§ 5.1. Устойчивость. Функция Ляпунова	112
§ 5.2. Теоремы Ляпунова	118
§ 5.3. Пример исследования устойчивости методом Ляпунова	124

§ 5.4. Исследование устойчивости методом гармонической линеаризации	129
§ 5.5. Частотный критерий абсолютной устойчивости	135
Глава 6. Процессы управления и вынужденные колебания в нелинейных системах	143
§ 6.1. Одночастотные вынужденные колебания. Частотные характеристики	143
§ 6.2. Процессы управления, сопровождающиеся вынужденными вибрациями	147
§ 6.3. Процессы управления в автоколебательных системах	156
§ 6.4. Колебательные переходные процессы	163
Глава 7. Нелинейные системы с коррекцией	175
§ 7.1. Линейная коррекция нелинейных систем	175
§ 7.2. Нелинейные корректирующие устройства	185
§ 7.3. Псевдолинейная коррекция	196
§ 7.4. Системы с переменной структурой	207
Глава 8. Дискретные нелинейные системы	214
§ 8.1. Виды нелинейных дискретных систем	214
§ 8.2. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных дискретных систем	217
§ 8.3. Одночастотные периодические колебания в нелинейных дискретных системах	220
§ 8.4. Коррекция систем управления с ЦВМ	225
§ 8.5. Особенности систем автоматического управления с ЦВМ	230
Глава 9. Самонастраивающиеся системы	233
§ 9.1. Виды самонастраивающихся систем	233
§ 9.2. Системы с разомкнутой цепью самонастройки	241
§ 9.3. Самонастраивающиеся системы с моделью	245
§ 9.4. Системы с анализом процесса управления	248
§ 9.5. Экстремальные системы	251
Литература	254

Е. П. ПОПОВ

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988



ББК 32.965.5
П58
УДК 681.5(075.8)

Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие. — 2-е изд., стер. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 256 с. — ISBN 5-02-013903-3.

Учебное пособие содержит основные разделы теории нелинейных систем, входящие в программу втузов. Подробно изложены широко применяемые на практике метод фазовой плоскости и метод гармонической линеаризации, приводится характеристика методов точечного преобразования и припасовывания. Основной упор сделан на выявлении основных особенностей динамического поведения нелинейных систем (автоколебания, скользящий процесс, логическое управление, переменная структура и т. п.). Значительное внимание уделяется коррекции нелинейных систем. Даются основные понятия о самонастраивающихся системах.

1-е изд. — в 1979 г.

Для студентов втузов, а также для инженеров — проектировщиков автоматических систем.

Табл. 1. Ил. 223. Библиогр. 37 назв.

Рецензент

доктор технических наук *Г. Н. Лебедев*

П 1502000000—160
053(02)—88 175-88

ISBN 5-02-013903-3

© Издательство «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1979, 1988

Настоящее учебное пособие по нелинейным автоматическим системам соответствует *второй* части курса теории автоматического регулирования, читаемого автором в МВТУ им. Н. Э. Баумана. Этой части предшествует *первая* часть — теория линейных систем [23]. Вопросы статистики и оптимизации рассматриваются в последующих частях курса, которыми являются статистическая динамика и теория оптимальных систем.

Основная задача автора состояла в том, чтобы изложить нелинейную теорию с наибольшей наглядностью. При этом акцент сделан на таких вопросах и методах, которые наиболее доступны для инженерных расчетов при анализе и проектировании нелинейных систем автоматического регулирования и управления. Кроме непрерывных нелинейных систем, кратко рассмотрены нелинейные дискретные системы. Раздел самонастраивающихся систем изложен конспективно и ограничен основными понятиями о видах, структуре и функционировании различных типов самонастраивающихся систем автоматического регулирования и управления.

Последовательность изложения материала следующая. Вначале на примерах нелинейных систем второго порядка в простейшем виде на фазовой плоскости рассматриваются наиболее характерные особенности переходных и установившихся процессов, которые не наблюдаются в системах линейных и порождены именно наличием нелинейности характеристик. Каждый такой пример (и соответствующий ему параграф во второй и третьей

главах) имеет самостоятельное значение как введение к рассмотрению определенного класса нелинейных процессов управления. Таким образом в рамках систем второго порядка удастся наглядно с методической точки зрения показать основные существенные особенности поведения нелинейных систем, хотя снижение порядка уравнения динамики всей замкнутой системы до второго является довольно сильной идеализацией реальных автоматических систем.

В последующих главах излагаются методы исследования и расчета нелинейных систем автоматического регулирования и управления, динамика которых описывается уже дифференциальным уравнением высокого порядка (выше второго). Это характерно для большинства реальных систем. Таковы главы четвертая, пятая, шестая и седьмая. В этих главах рассматриваются нелинейные непрерывные системы и релейные системы, а также некоторые способы их коррекции. Глава восьмая посвящена краткому изложению методов исследования устойчивости и периодических колебаний нелинейных дискретных систем.

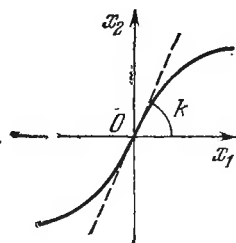
§ 1.1. Виды нелинейностей

Система автоматического управления или регулирования называется *нелинейной* в том случае, если хотя бы одно звено системы описывается нелинейным уравнением (обладает нелинейной характеристикой). В первой части курса [23] изучались линейные системы как обыкновенные, так и другие (с запаздыванием, с распределенными параметрами, с переменными параметрами и дискретные). Система любого из этих видов становится нелинейной, если хотя бы в одном звене системы имеется какое-либо отклонение от линейной зависимости. Поэтому класс возможных нелинейных систем весьма широк.

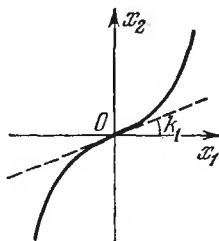
Строго говоря, все реальные системы являются в большей или меньшей степени нелинейными. Однако во всех случаях, когда с инженерной точки зрения допустимо рассматривать линеаризованную систему, обращаются к линейной теории как более простой и более разработанной. И только тогда, когда нелинейность играет существенную роль в поведении системы, прибегают к теории нелинейных систем. Последняя становится все более важной для практики по мере повышения требований к качеству процессов и к точности расчета систем автоматического управления и регулирования.

Можно различать статические и динамические нелинейности.

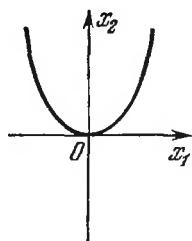
Статические нелинейности — это нелинейности статических характеристик. Они могут быть непрерывными (рис. 1.1), или релейными (рис. 1.2). С другой стороны, они могут быть однозначными (рис. 1.1 и 1.2), петлевыми гистерезисными (рис. 1.3) или опережающими (рис. 1.4). На рисунках даны примеры аналитического описания статических нелинейностей. Нелинейные стати-



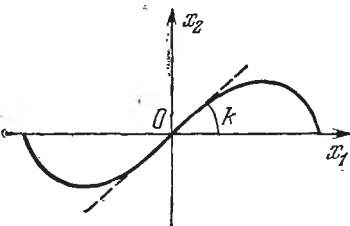
а)



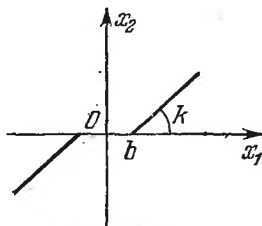
б) $x_2 = k_1 x_1 + k_3 x_1^3$ или
 $x_2 = k_1 x_1 + k_2 x_1^2 \operatorname{sign} x_1$



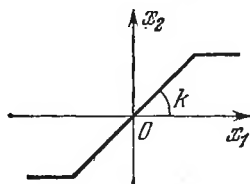
в) $x_2 = k x_1^2$



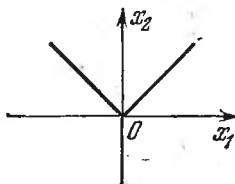
г) $x_2 = k \sin x_1$



д) $x_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 \leq b, \\ k(x_1 - b \cdot \operatorname{sign} x) & \text{при } |x_1| > b. \end{cases}$



е)



ж) $x_2 = |x_1|$

Рис. 1.1.

ческие характеристики могут иметь и более сложный вид, как это показано, например, на рис. 1.5. а) Комбинация релейной и линейной характеристик; б) характеристика расхода газа x_2 при разных давлениях в зависимости от открытия клапана x_1 ; в) зависимость скорости

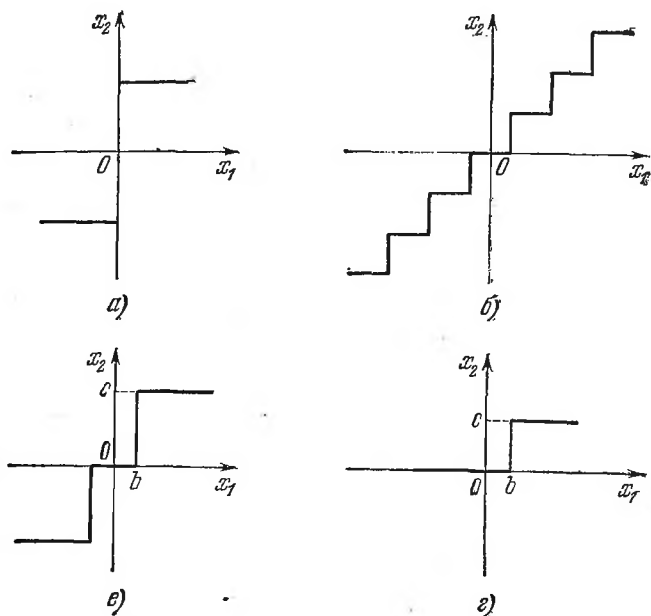


Рис. 1.2.

привода x_2 от управляющего сигнала x_1 при разных нагрузках; г) зависимость между моментом и угловой скоростью электродвигателя при разных напряжениях.

Динамические нелинейности — это нелинейности, связанные с дифференциальными уравнениями *динамики* звена. К ним относится, например, нелинейное трение. Так, нелинейная сила вязкого трения характеризуется выражением

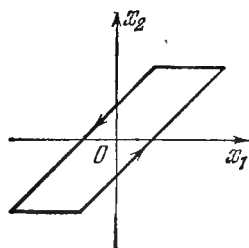
$$F_T = - \left[c_1 + c_2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \frac{dx}{dt}.$$

Сила сухого трения в простейшем случае (имеются и

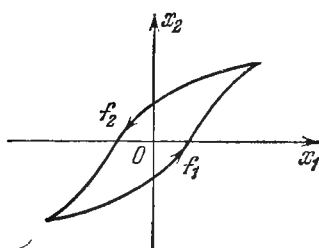
более сложные зависимости) описываются соотношением

$$F_T = -c \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} \text{ при } \frac{dx}{dt} \neq 0,$$

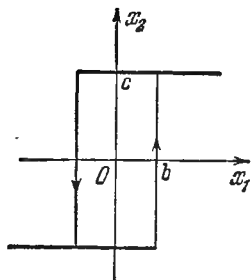
$$-c \leq F_T \leq c \text{ при } \frac{dx}{dt} = 0.$$



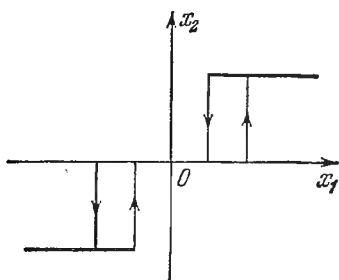
а)



$$б) \quad x_2 = \begin{cases} f_1(x_1) & \text{при } \dot{x}_1 > 0, \\ f_2(x_1) & \text{при } \dot{x}_1 < 0 \end{cases}$$



$$в) \quad x_2 = \begin{cases} c \cdot \operatorname{sign}(x_1 - b) & \text{при } \dot{x}_1 > 0, \\ c \cdot \operatorname{sign}(x_1 + b) & \text{при } \dot{x}_1 < 0 \end{cases}$$



г)

Рис. 1.3.

Звено с изменяющейся постоянной времени имеет вид

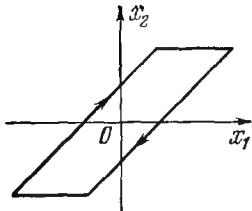
$$[T_1(x_1)p + 1]x_2 = k_1x_1, \quad p = \frac{d}{dt}$$

или же

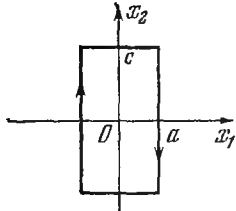
$$(T_1p + 1)x_2 = k_1x_1 \text{ при } px_1 > 0,$$

$$(T_2p + 1)x_2 = k_1x_1 \text{ при } px_1 < 0.$$

Здесь надо отметить особенность такой динамической нелинейности по сравнению с линейным звеном с пере-

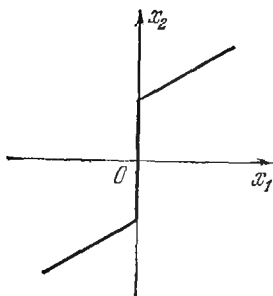


а)

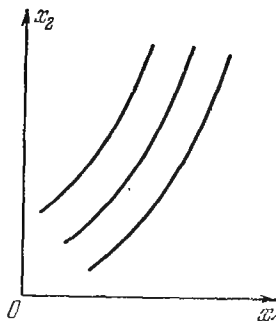


б) $x_2 = c \operatorname{sign} \dot{x}_1$ при $|x_1| \leq a$

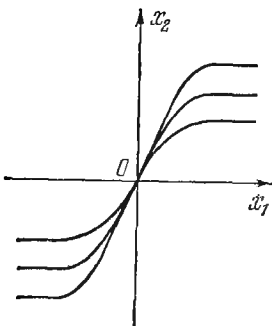
Рис. 1.4.



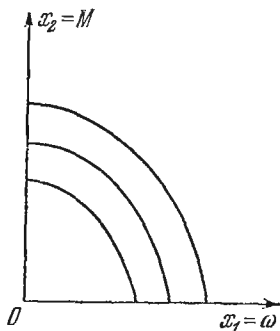
а)



б)



в)



г)

Рис. 1.5.

менным параметром вида

$$[T_1(t)p + 1]x_2 = k_1x_1.$$

В системе с переменными параметрами фигурирует зависимость коэффициентов *от времени*, в то время как нелинейность характеризует их *зависимость от координат* (или производных). Точно так же, например, гистерезис (рис. 1.3) представляет собой нелинейное (координатное) запаздывание, в отличие от временного или инерционного в линейных системах. Аналогично на рис. 1.4 представлено нелинейное (координатное) опережение.

Конечно, могут быть нелинейные звенья с переменным параметром, например вида

$$[T_1(x_1, t)p + 1]x_2 = k_1x_1,$$

а также нелинейные запаздывающие звенья типа

$$x_2(t) = F(x_1(t - \tau)).$$

Примерами динамических нелинейностей могут служить также любые нелинейные дифференциальные, разностные и интегральные уравнения.

Нелинейности в системах управления и регулирования могут быть *естественно присущими* реальной системе (трение, люфт, гистерезис, зона нечувствительности, насыщение) и зачастую вредными; влияние их в этом случае надо стремиться уменьшить. Но могут быть и *специально вводимые* нелинейности для придания системе желаемых свойств. Таковы, например, релейные элементы и различные нелинейные и псевдолинейные корректирующие устройства. Большой интерес представляют также логические нелинейные управляющие блоки и системы с переменной структурой, о которых речь будет в последующих главах. Оптимизация систем автоматического управления также в большинстве случаев связана с введением специальных нелинейностей в контур системы.

Введение специальных нелинейностей приводит к различным нелинейным законам управления, которые обладают более богатыми возможностями по сравнению с линейными.

§ 1.2. Фазовое пространство и фазовая плоскость

При составлении уравнений динамики нелинейной системы все звенья, поддающиеся линеаризации в пределах малых отклонений координат, описываются линейными уравнениями. Для одного или двух (реже — нескольких) существенно нелинейных звеньев этой системы составляются нелинейные уравнения (или используются нелинейные характеристики). В общем случае нелинейные дифференциальные уравнения динамики в нормальной форме имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t; g(t); f(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — координаты состояния системы, $g(t)$, $f(t)$ — соответственно задающие и возмущающие воздействия, или в векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, t, g, f).$$

Для рассмотрения переходных процессов, вызванных какими-либо начальными отклонениями координат (при отсутствии внешних воздействий) эти уравнения для систем с постоянными параметрами (т. е. для стационарных систем) принимают вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

а в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x). \quad (1.2)$$

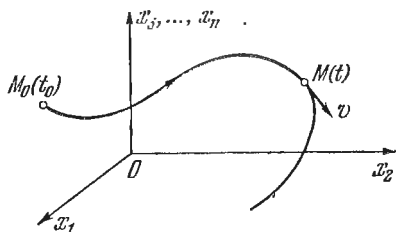


Рис. 1.6.

Для исследования нелинейных систем широко используется метод фазового пространства, который состоит в следующем. Представим себе n -мерное пространство координат состояния системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (рис. 1.6)*,

*) На рис. 1.6 координатные оси $x_3, \dots, x_n$ n -мерного пространства условно совмещены в одну ось.

называемое *фазовым пространством*. Тогда начальное состояние системы $x(t_0)$ изобразится определенной точкой M_0 с координатами $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$, а процесс во времени, т. е. решение уравнений (1.1)

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

получит изображение в виде некоторой кривой (рис. 1.6), которая называется *фазовой траекторией* данной системы.

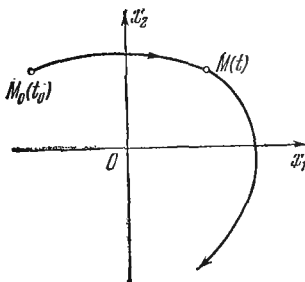


Рис. 1.7.

Текущая точка M на ней, соответствующая состоянию системы в произвольный момент времени t , называется *изображающей точкой*. Отметим, что значения нелинейных функций $\Phi_i = \frac{dx_i}{dt}$, стоящих в уравнениях (1.1) справа, определяют в каждый момент времени *проекции скорости v изображающей точки M на оси координат x_i* .

Если в многомерном фазовом пространстве мы лишь мысленно можем представить себе геометрическую картину, то, например, для системы второго порядка ($n = 2$).

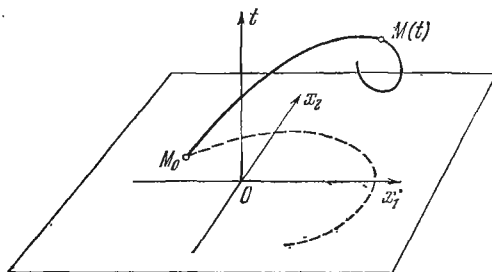


Рис. 1.8.

можно реально изображать фазовые траектории на плоскости (рис. 1.7). При этом можно изобразить и *интегральную кривую* для данной системы, добавив ось времени t (рис. 1.8).

Уравнения (1.1) при $n = 2$ принимают вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = \Phi_2(x_1, x_2). \quad (1.3)$$

Дифференциальное уравнение фазовой траектории получается путем исключения времени из системы уравнений (1.3):

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\Phi_2(x_1, x_2)}{\Phi_1(x_1, x_2)}. \quad (1.4)$$

Точки *равновесного состояния* системы определяются нулевыми значениями скорости $dx_1/dt = 0$, $dx_2/dt = 0$; следовательно, в этих точках

$$\Phi_1(x_1, x_2) = 0, \quad \Phi_2(x_1, x_2) = 0,$$

что создает неопределенность правой части уравнения (1.4). Поэтому точки равновесного состояния системы являются так называемыми *особыми точками* на фазовой плоскости.

Сопоставим изображение переходного процесса в виде фазовых траекторий на плоскости $y(x)$ с обычным его изображением в виде кривой $x(t)$. Для удобства положим, что уравнения (1.3) имеют более простой вид:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \Phi(x, y),$$

т. е. координата y , откладываемая по оси ординат фазовой плоскости, представляет собой скорость изменения координаты x , откладываемой по оси абсцисс. В этом случае для изображающей точки справедливо следующее

Правило для направления движения по фазовым траекториям:

а) в верхней полуплоскости (рис. 1.9) — слева направо, т. е. в сторону увеличения x , так как там скорость $y > 0$;

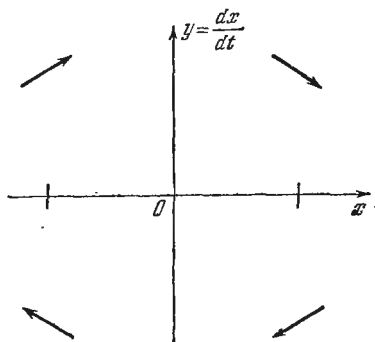


Рис. 1.9.

б) в нижней полуплоскости, наоборот,—справа налево;

в) ось x пересекается фазовыми траекториями под прямым углом, так как там скорость $y = 0$, т. е. имеет место максимум или минимум величины x .

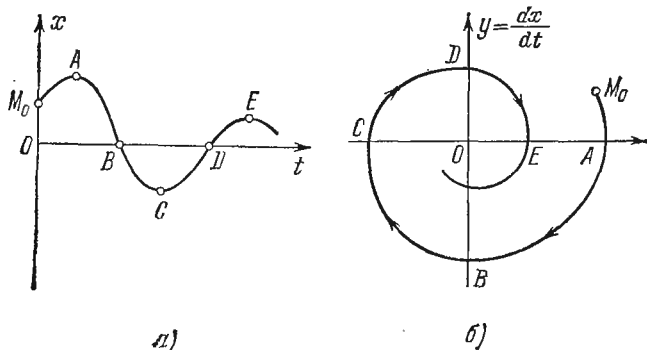


Рис. 1.10.

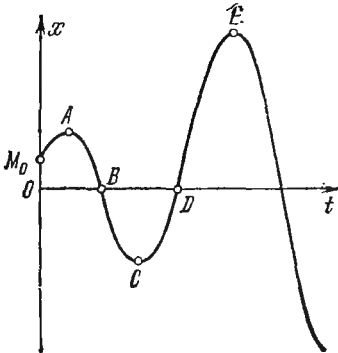
Заметим, что это правило недействительно в общем случае уравнения (1.3).

Рассмотрим сначала затухающий колебательный процесс $x(t)$ (рис. 1.10, а). На фазовую плоскость (рис. 1.10, б), где $y = dx/dt$, нанесем отмеченные на кривой переходного процесса точки $A, B, C, \dots$, в которых x имеет либо максимум, либо нуль, либо минимум. В результате получим, что затухающий колебательный процесс изображается на фазовой плоскости в виде сходящейся спиралевидной кривой.

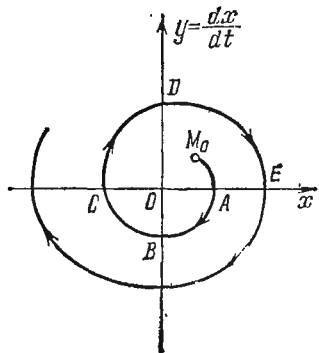
Аналогично расходящийся колебательный процесс (рис. 1.11, а) изобразится на фазовой плоскости в виде расходящейся спиралевидной кривой (рис. 1.11, б).

Очевидно, что периодический процесс (рис. 1.12, а) изобразится на фазовой плоскости в виде замкнутой кривой (рис. 1.12, б). За один период колебаний изображающая точка M пробегает весь замкнутый контур, а затем повторяет движение по нему.

Монотонный затухающий процесс $x(t)$ (рис. 1.13, а) изобразится на фазовой плоскости в виде кривой, монотонно приближающейся к положению равновесия

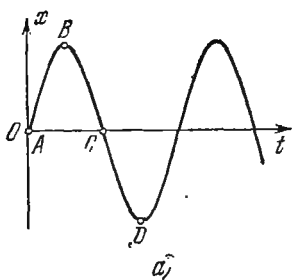


а)

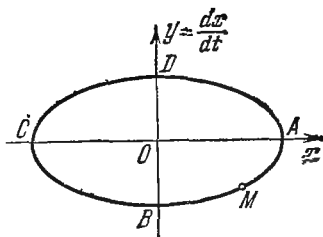


б)

Рис. 1.11.

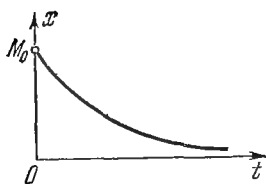


а)

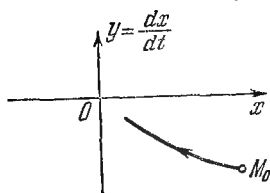


б)

Рис. 1.12.



а)



б)

Рис. 1.13.

(рис. 1.13, б), а монотонный расходящийся процесс (рис. 1.14, а) — в виде монотонно удаляющейся кривой (рис. 1.14, б).

Удобство представления процесса в виде фазовых траекторий на плоскости состоит в том, что вся совокуп-

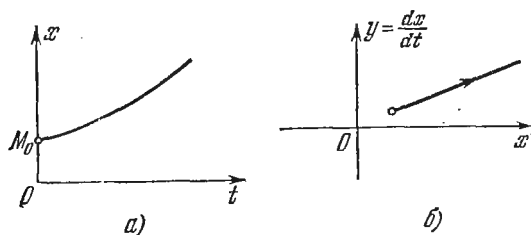


Рис. 1.14.

ность возможных форм переходных процессов в системе при любых начальных условиях представляется в виде единого «фазового портрета». Недостатком же является то, что мы вынуждены при этом ограничиваться рассмотрением лишь систем второго порядка. Для исследования нелинейных систем более высокого порядка будут применены другие методы.

§ 1.3. Типы особых точек и фазовые портреты линейных систем

В качестве исходного материала, используемого в дальнейшем при изучении нелинейных систем, рассмотрим особые точки *линейных* систем второго порядка. Уравнения линейной системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

или в векторно-матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

при условии, что матрица A невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$. Дифференциальное уравнение фазовых траекторий, согласно (1.5), имеет вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}. \quad (1.6)$$

Единственной особой точкой (точкой равновесного состояния системы) является точка $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Пусть корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения

$$\det[A - \lambda E] = 0$$

(здесь E — единичная матрица) различны. Путем подстановки вида $x = Py$, где P — некоторая невырожденная матрица, матрицу A можно привести к диагональному виду. Уравнения (1.5) примут вид

$$\frac{dy}{dt} = P^{-1}APy = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2] y,$$

или

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2.$$

Решением этих уравнений является

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим фазовые траектории в этой условной системе координат (y_1, y_2) , а затем отобразим фазовые траектории на плоскость исходных координат (x_1, x_2) .

Случай вещественных корней $\lambda_{1,2}$. Переходный процесс — апериодический. Пусть

$$|\lambda_2| > |\lambda_1|. \quad (1.8)$$

Исключив t из решения (1.7), получим уравнение фазовых траекторий

$$y_2 = C y_1^{\lambda_2/\lambda_1}. \quad (1.9)$$

Если знаки корней $\lambda_{1,2}$ одинаковы, то с учетом (1.8) имеем $\lambda_2/\lambda_1 > 1$, и фазовые траектории представляются в виде парабол, как показано на рис. 1.15. При этом на-

правление движения изображающей точки M по любой фазовой траектории определяется уравнением (1.7), а именно: случаю $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ отвечает рис. 1.15, а,

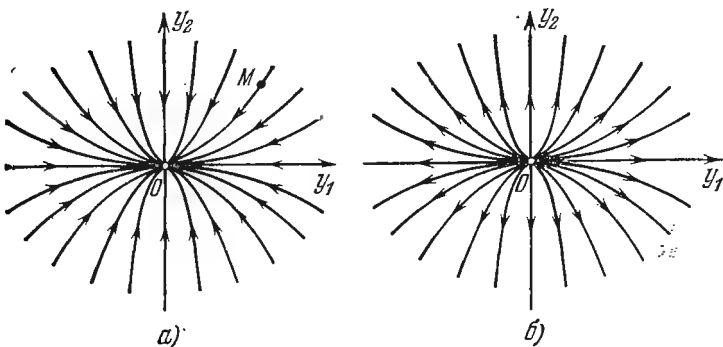


Рис. 1.15.

что соответствует затухающим переходным процессам; случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ (рис. 1.15, б) соответствует расходящимся переходным процессам.

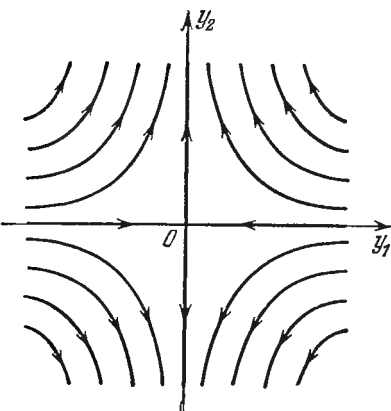


Рис. 1.16.

Если же знаки корней $\lambda_{1,2}$ различны, то в уравнении (1.9) имеем $\lambda_2/\lambda_1 < -1$, и фазовые траектории имеют вид гипербол (рис. 1.16).

В случае отрицательных вещественных корней (рис. 1.15, а) особая точка 0 называется *точкой типа «устойчивый узел»*.

В случае положительных вещественных корней (рис. 1.15, б) особая точка 0 называется *точкой типа «неустойчивый узел»*.

В случае же вещественных корней разных знаков (рис. 1.16) особая точка 0 называется *точкой типа «седло»*. Седловая точка всегда неустойчива.

Отобразим полученные фазовые портреты линейной системы на плоскость исходных координат (x_1, x_2) . Используем тот факт, что оси парабол и асимптоты гипербол (y_1, y_2) сами являются фазовыми траекториями и при линейном преобразовании останутся прямыми. Их отображение на плоскость (x_1, x_2) примет вид $x_2 = kx_1$. Подставив это соотношение в (1.6), получим

$$k = \frac{a_{21} + a_{22}k}{a_{11} + a_{12}k}$$

или

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{21} = 0,$$

откуда находим два значения k_1 и k_2 . Это дает две прямолинейные фазовые траектории (рис. 1.17)*. На

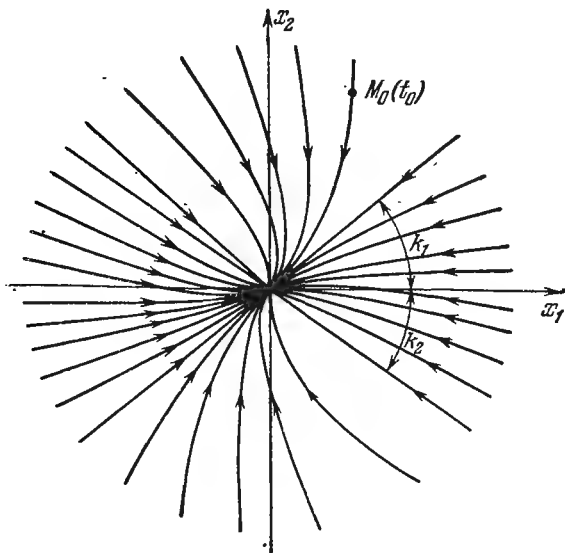


Рис. 1.17.

рис. 1.17 дано расположение также и остальных (криволинейных) фазовых траекторий. Аналогичная картина

*) Как и ранее на рисунках коэффициенты k обозначают не углы, а крутизну наклона соответствующих прямых (т. е. k равны тангенсам углов наклона).

изображена и на рис. 1.18 для особой точки типа «седло». По какой из фазовых траекторий пойдет переходный процесс в системе, определяется начальными условиями $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, которые дают нам координаты начальной точки M_0 (рис. 1.17).

Для уточнения такой качественной картины фазовых траекторий можно применить *метод изоклин*. *Изоклиной*

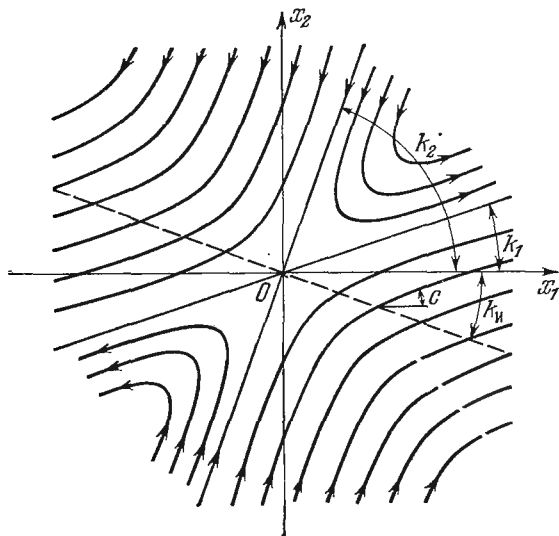


Рис. 1.18.

называется линия, соединяющая точки фазовых траекторий с одинаковым наклоном касательной, т. е. для каждой изоклины $dx_2/dx_1 = c$. Поэтому уравнение изоклины, согласно (1.6), имеет вид

$$\frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2} = c. \quad (1.10)$$

Следовательно, любая прямая $x_2 = k_{\pi}x_1$ будет изоклиной с соответствующим значением постоянной c . Задаваясь определенной величиной k_{π} (рис. 1.18), согласно (1.10) находим

$$c = \frac{a_{21} + a_{22}k_{\pi}}{a_{11} + a_{12}k_{\pi}}.$$

Нанеся несколько изоклин и зная для каждой из них крутизну наклона с пересекающих ее фазовых траекторий, можно уточнить всю картину фазовых траекторий.

Случай равных вещественных корней: $\lambda_1 = \lambda_2$. В этом случае получается *вырожденный узел*, устойчивый при $\lambda_{1,2} < 0$ и неустойчивый при $\lambda_{1,2} > 0$ (фазовые траектории показаны в координатах y_1, y_2 на рис. 1.19, а, б).

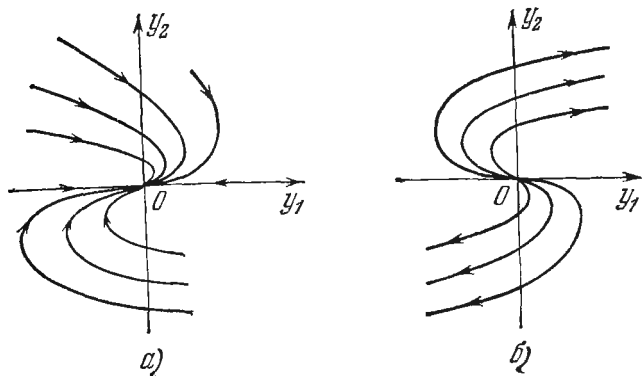


Рис. 1.19.

Случай комплексных корней $\lambda_{1,2}$. Переходный процесс — колебательный. Пусть

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta. \quad (1.11)$$

Решения (1.7) принимают комплексный вид

$$y_1 = C_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t),$$

$$y_2 = C_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t - j \sin \beta t).$$

Введя новые переменные с помощью подстановки

$$y_1 = z_1 + jz_2, \quad y_2 = z_1 - jz_2,$$

преобразуем решение к вещественной форме

$$z_1 = A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \gamma),$$

$$z_2 = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma),$$

где A и γ — произвольные постоянные. Перейдем к по-

лярным координатам (r, φ) . Тогда

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = Ae^{\alpha t}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{z_2}{z_1} = \operatorname{tg}(\beta t + \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

$$\varphi = \beta t + \gamma + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эти выражения описывают логарифмическую спираль, изображенную на рис. 1.20, а для случая $\alpha < 0$ и на рис. 1.20, б для $\alpha > 0$.

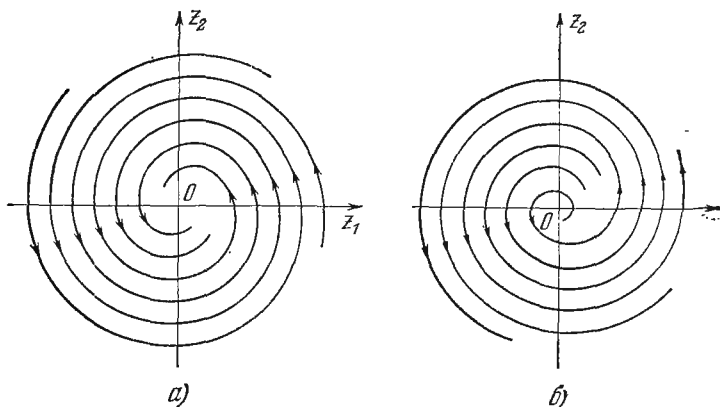


Рис. 1.20.

В случае комплексных корней с отрицательной вещественной частью (рис. 1.20, а) особая точка 0 называется *точкой типа «устойчивый фокус»*.

В случае комплексных корней с положительной вещественной частью (рис. 1.20, б) особая точка 0 называется *точкой типа «неустойчивый фокус»*.

Для преобразования полученных фазовых портретов в исходную систему координат (x_1, x_2) воспользуемся методом изоклин. Пусть, например, задана система

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0. \quad (1.13)$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -1 \pm j2$.

Обозначив $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, приведем систему к виду

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 - 5x_1. \quad (1.14)$$

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2 - 5 \frac{x_1}{x_2}. \quad (1.15)$$

Для изоклины $x_2 = k_{\text{и}} x_1$ отсюда находим

$$c = -2 - \frac{5}{k_{\text{и}}}.$$

Возьмем четыре значения. $k_{\text{и}} = 0, 1, \infty, -1$; тогда $c = -\infty, -7, -2, 3$. Соответствующие направления ка-

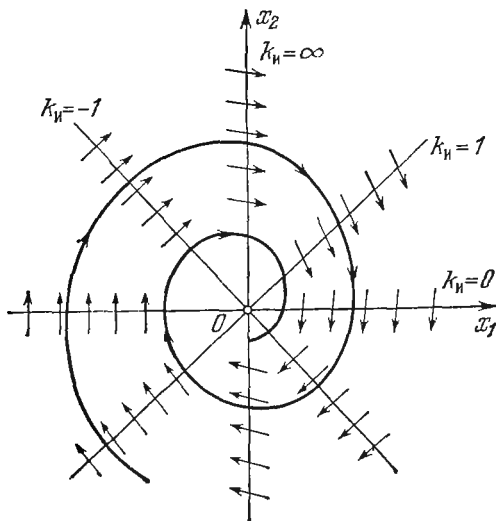


Рис. 1.21.

сательных к фазовым траекториям показаны на рис. 1.21 стрелками. Ориентируясь по ним, вычерчиваем фазовые траектории. Одна из них изображена на рис. 1.21.

Как частный случай (1.11), при $\alpha = 0$, т. е. для чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$, из (1.12) в полярных координатах на плоскости (z_1, z_2) получаем $r = A = \text{const}$. Фазовые траектории имеют вид окружностей (рис. 1.22). При переходе к исходным координатам

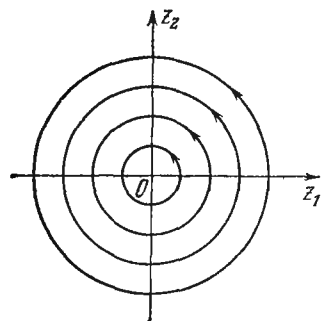


Рис. 1.22.

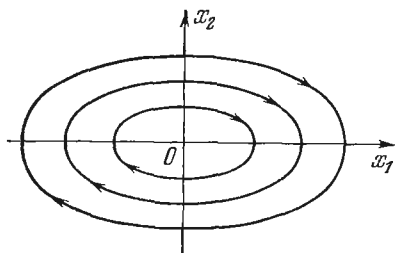


Рис. 1.23.

(x_1, x_2) получатся эллипсовидные замкнутые кривые (рис. 1.23). Это соответствует периодическим во времени процессам. В случае чисто мнимых корней особая точка 0 (рис. 1.22 и 1.23) называется *точкой типа «центр»*.

§ 1.4. Особые точки и фазовые портреты нелинейных систем

Рассмотрим фазовые траектории нелинейной системы второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = \Phi_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \Phi_2(x, y). \quad (1.16)$$

Особые точки, отвечающие равновесным состояниям системы, определяются из условия

$$\Phi_1(x, y) = 0, \quad \Phi_2(x, y) = 0. \quad (1.17)$$

Для выявления типа каждой особой точки уравнения (1.16) линеаризуются при малых отклонениях координат в окрестности особой точки. Затем определяются корни характеристического уравнения линеаризованной системы, по которым, согласно § 1.3, и устанавливается тип особой точки.

Проведем рассмотрение этого вопроса на примере. Пусть заданы уравнения нелинейной системы

$$\frac{dx}{dt} = -x(1+x^2) - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y. \quad (1.18)$$

Уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{-x(1+x^2)-2y}. \quad (1.19)$$

Найдем особые точки согласно условиям (1.17)

$$x(1+x^2) + 2y = 0, \quad x + y = 0,$$

откуда получаем три решения:

$$\begin{aligned} 1) \quad x = 0, \quad y = 0, \quad 2) \quad x = 1, \quad y = -1, \\ 3) \quad x = -1, \quad y = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, система имеет три возможных равновесных состояния.

Исследуем характер особых точек.

1. В окрестности точки $x = 0, y = 0$ линеаризованные уравнения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = x + y.$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Корни $\lambda_{1,2} = \pm j$ — чисто мнимые. Следовательно, это особая точка типа «центр».

2. В окрестности точки $x = 1, y = -1$ вводим малые отклонения в координатах $\xi = x - 1, \eta = y + 1$. Подставляя в уравнения (1.18) $x = \xi + 1, y = \eta - 1$ и отбрасывая нелинейные члены, получим линеаризованную систему

$$\frac{d\xi}{dt} = -4\xi - 2\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi + \eta.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

вещественны и имеют разные знаки. Следовательно, это особая точка типа «седло».

3. Рассматривая линеаризованную систему в окрестности точки $x = -1, y = 1$, подстановкой в уравнение (1.18) $x = \xi - 1, y = \eta + 1$ приходим к тому же уравнению, что и в предыдущем случае. Следовательно, здесь тоже особая точка типа «седло».

Найдем асимптоты фазовых траекторий в седловых точках. Положив $\eta = k\xi$, из уравнения фазовых траекторий

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{-4\xi - 2\eta}$$

получим

$$k = \frac{1+k}{-4-2k},$$

или

$$2k^2 + 5k + 1 = 0,$$

откуда находим

$$k_1 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4},$$

$$k_2 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}.$$

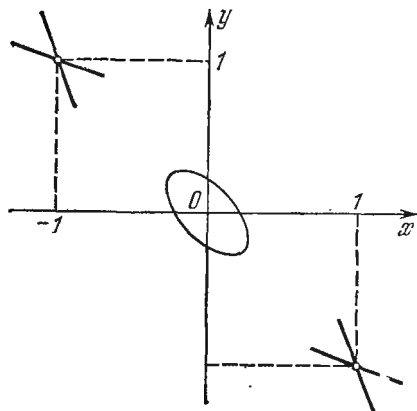


Рис. 1.24.

На рис. 1.24 эти асимптоты показаны в окрестностях соответствующих особых точек. Точка же $(0, 0)$ типа «центр» должна быть окружена замкнутыми кривыми. Исходя из этого, на рис. 1.25 изображен примерный ход фазовых траекторий на всей плоскости.

Для определения направления движения изображающей точки по фазовым траекториям достаточно исследовать какую-либо одну точку. Возьмем, например, точку $x = 0, y = 1$. Согласно уравнениям (1.18) в этой точке имеем $dx/dt = -2, dy/dt = 1$, т. е. x изменяется в сторону уменьшения, а y — в сторону увеличения. В соответствии с этим и поставлена стрелка на фазовой траекто-

рии, проходящей через точку $(0, 1)$, а так как система непрерывна, в ту же сторону будут направлены и все соседние фазовые траектории.

Таким образом выясняется качественная картина фазовых траекторий. Отметим, что в данном примере ни одно из трех возможных равновесных состояний системы не является устойчивым.

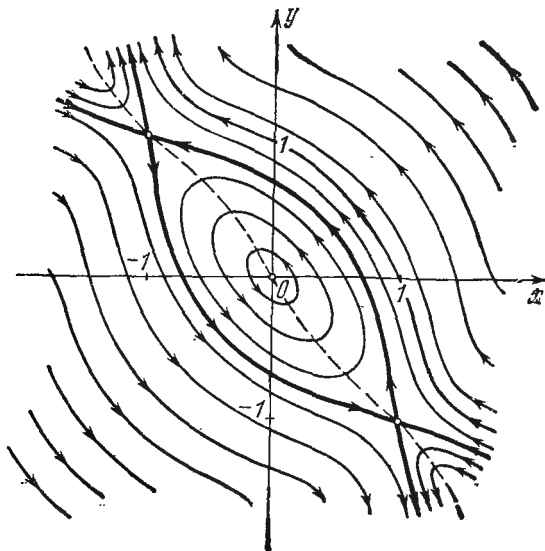


Рис. 1.25.

Методом изоклин можно уточнить очертания фазовых траекторий. Уравнение изоклины, согласно (1.19), имеет вид

$$\frac{x+y}{-x(1+x^2)-2y} = c, \quad (1.20)$$

где c — крутизна наклона (dy/dx) пересекающих изоклину фазовых траекторий. Например, значению $c = 1$, т. е. углу наклона траекторий, равному 45° , соответствует, согласно (1.20), изоклина, описываемая уравнением

$$y = -\frac{x}{3}(2+x^2).$$

Она проходит через все три особые точки (штриховая линия на рис. 1.25). В отличие от линейных систем, здесь изоклина криволинейная.

Отметим теперь некоторые общие особенности процессов в нелинейных системах. Прежде всего, это возмож-

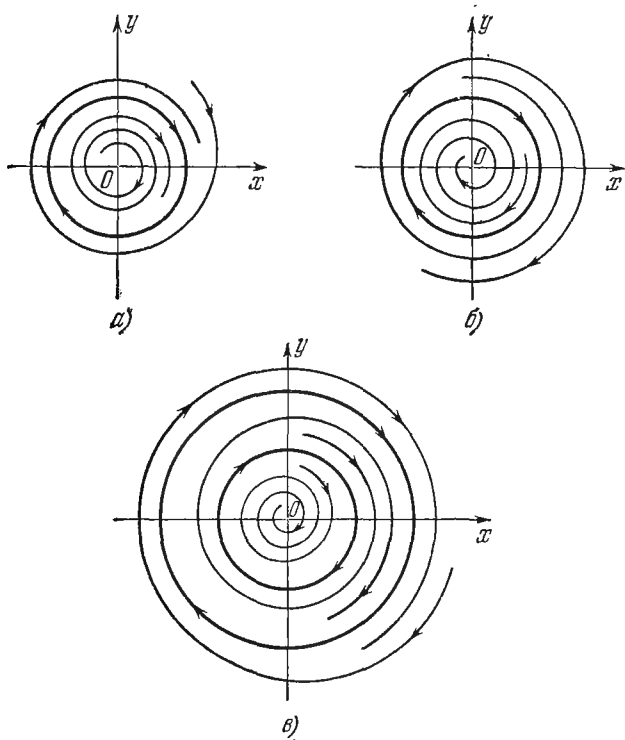


Рис. 1.26.

ность наличия двух или нескольких *равновесных состояний* (особых точек), как уже было видно на приведенном примере. В соответствии с этим на фазовой плоскости получаются области с различными типами фазовых траекторий. На рис. 1.25, например, эти области разделены жирно обозначенными кривыми. Такие *особые кривые*, разделяющие области с разными типами фазовых траекторий, называются *сепаратрисами*.

Существуют и другого типа особые кривые. Важным типом особых кривых являются *предельные циклы* — замкнутые кривые, соответствующие периодическим процессам, в окрестности которых имеют место колебательные переходные процессы. Если эти фазовые траектории

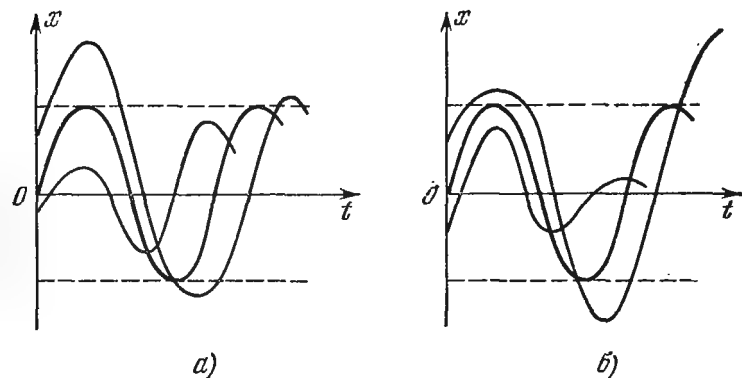


Рис. 1.27.

изнутри и снаружи сходятся к данному предельному циклу (рис. 1.26, а), то мы имеем *устойчивый предельный цикл*. Если же они удаляются в обе стороны (рис. 1.26, б), — *неустойчивый предельный цикл*. Возможен и случай двух предельных циклов (рис. 1.26, в), из которых один устойчивый (в данном случае внешний), а второй неустойчивый.

Особая точка O на рис. 1.26 представляет собой в первом случае неустойчивое равновесное состояние, а во втором и третьем — устойчивое. Картина процессов во времени, соответствующая рис. 1.26, а, б, изображена на рис. 1.27, а, б.

Физический смысл устойчивого периодического процесса, отвечающего предельному циклу, — *автоколебания системы*. Это собственные периодические колебания, происходящие при отсутствии внешнего периодического воздействия, причем амплитуда и частота автоколебаний не зависят от начальных условий, а определяется внутренними свойствами системы. Автоколебания могут возникать только в нелинейных системах, Что же касается

линейных систем, то в них собственные периодические колебания возможны только на границе устойчивости ($\lambda_{1,2} = \pm j\omega$), причем амплитуда их определяется начальными условиями (см. рис. 1.23).

Физический смысл неустойчивого предельного цикла совсем иной. Как видно из рис. 1.26, б, неустойчивый предельный цикл — это *граница областей начальных условий*. При начальных условиях $x(t_0)$, $y(t_0)$, лежащих внутри неустойчивого предельного цикла, получается затухающий переходный процесс, если же они лежат снаружи — расходящийся. Следовательно, равновесное состояние O в данном случае устойчиво при небольших начальных отклонениях, а при больших — система неустойчива. Говорят: система устойчива «в малом» и неустойчива «в большом».

Здесь важно отметить, что, в отличие от линейных систем, типы динамических процессов нелинейных систем могут существенно *зависеть от начальных условий*.

Интересно далее отметить, что в первом случае (рис. 1.26, а) единственным устойчивым установившимся состоянием системы является автоколебательный режим. Во втором случае (рис. 1.26, б) — равновесное состояние O . В третьем же случае система имеет два устойчивых установившихся состояния: равновесное O , и автоколебания с большой амплитудой (внешний предельный цикл). Какой из них установится, зависит от начальных условий.

В первом случае говорят, что имеет место «мягкое возбуждение» автоколебаний (т. е. при любых начальных условиях), а в третьем случае — «жесткое возбуждение» автоколебаний, так как, чтобы система вышла на них, необходимо начальные условия «забросить» за пределы внутреннего неустойчивого предельного цикла.

Все это будет проиллюстрировано в последующих главах на примерах систем автоматического регулирования. Кроме того, будут проиллюстрированы и многие другие особые свойства нелинейных систем, как, например, отрезки равновесия, скользящие процессы, а также особенности, связанные с вынужденными колебаниями и с процессами управления, в которых, в отличие от линейных систем, не соблюдается принцип суперпозиции.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 2.1. Переходные процессы и автоколебания релейной системы

В данной главе исследование переходных процессов на фазовой плоскости иллюстрируется на примерах общего характера, выявляющих основные отличительные особенности процессов в нелинейных автоматических системах.

Рассмотрим систему с релейной характеристикой общего вида. Уравнение динамики объекта (рис. 2.1, а) имеет вид

$$(T_1 p + 1)x = -k_1 x_1, \quad (2.1)$$

а уравнение регулятора

$$p x_1 = F(x), \quad (2.2)$$

где $F(x)$ — релейная характеристика (рис. 2.1, б). Общее

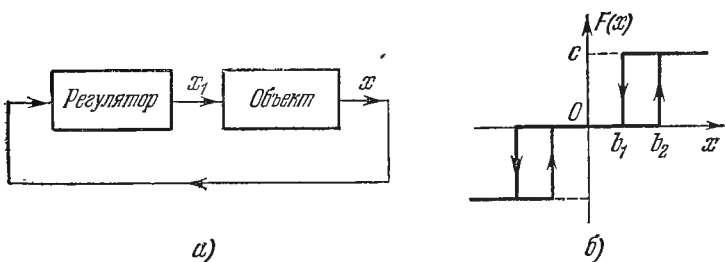


Рис. 2.1.

уравнение динамики системы найдем, если продифференцируем уравнение (2.1) и затем подставим в него (2.2). В результате получим выражение

$$T_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_1 F(x),$$

которое можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} F(x). \quad (2.3)$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} \frac{F(x)}{y}. \quad (2.4)$$

Как видно из заданной характеристики (рис. 2.1, б), нелинейную функцию $F(x)$ можно описать следующим образом:

если $y = dx/dt > 0$, то

$$F(x) = \begin{cases} -c & \text{при } x < -b_1, \\ 0 & \text{при } -b_1 < x < b_2, \\ +c & \text{при } x > b_2; \end{cases}$$

если $y = dx/dt < 0$, то

$$F(x) = \begin{cases} +c & \text{при } x > b_1, \\ 0 & \text{при } -b_2 < x < b_1, \\ -c & \text{при } x < -b_2. \end{cases}$$

В связи с этим на фазовой плоскости (x, y) можно выделить три области: (1) $F(x) = -c$; (2) $F(x) = 0$; (3) $F(x) = +c$. Эти три области разделены прямыми (на рис. 2.2 они показаны штриховой линией), которые называются *линиями переключения*.

Такую фазовую плоскость называют *многолистной*. На каждом листе (1, 2, 3) получится свой вид фазовых траекторий. По линиям переключения эти листы «сшиваются». Фазовые траектории непрерывно переходят с одного листа на другой (за исключением некоторых особых случаев, где они встречаются).

В области 1 ($F(x) = -c$) уравнение (2.4) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1} + \frac{k_1 c}{T_1 y}.$$

Проинтегрировав его, получим уравнение фазовых траекторий в области 1:

$$x = -k_1 c T_1 \ln|y - k_1 c| - T_1 y + C_1. \quad (2.5)$$

Фазовые траектории имеют асимптоту $y = k_1 c$, к которой они стремятся при неограниченном увеличении x . Такие фазовые траектории изображены в области 1 на рис. 2.2. Направление их определяется в соответствии с рассмотренным выше правилом (стр. 15, 16, рис. 1.9).

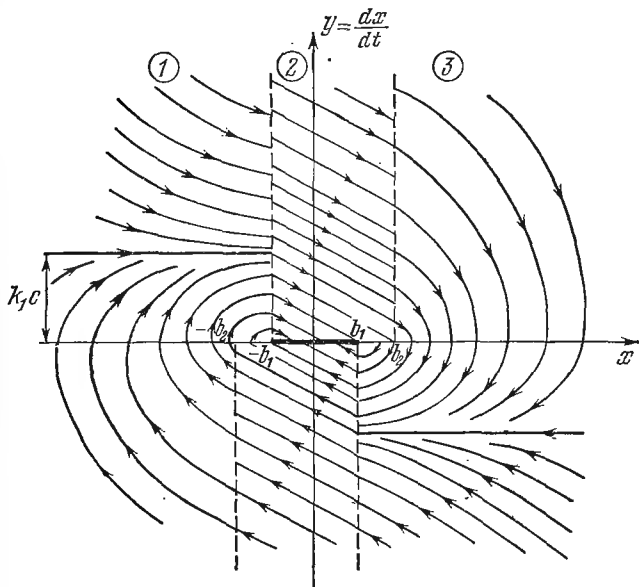


Рис. 2.2.

В области 2 ($F(x) = 0$) уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1}, \quad y = -\frac{1}{T_1}x + C_2.$$

Фазовые траектории — прямолинейные отрезки (см. область 2 на рис. 2.2).

Наконец, в области 3 ($F(x) = +c$) уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1} - \frac{k_1 c}{T_1 y},$$

откуда, аналогично (2.5), уравнение фазовых траекторий будет

$$x = k_{1c}T_1 \ln|y + k_{1c}| - T_1 y + C_3. \quad (2.6)$$

Фазовые траектории в области 3 стремятся к асимптоте $y = -k_{1c}$ при уменьшении x (на рис. 2.2).

В целом фазовые траектории принимают спиралевидную форму. Это соответствует затухающим колебатель-

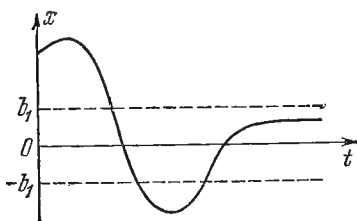


Рис. 2.3.

ным процессам. Однако колебательный процесс затухает не до нуля, а до некоторого произвольного значения (рис. 2.2, 2.3) в интервале $-b_1 < x < b_1$, $y = 0$, т. е. внутри зоны нечувствительности реле (рис. 2.1, б). Таким образом, вместо

особой точки здесь получается особый отрезок равновесных состояний, показанный утолщенной линией на рис. 2.2. По какой из фазовых траекторий пойдет переходный процесс в системе, определяется начальными условиями $x(t_0)$, $y(t_0)$.

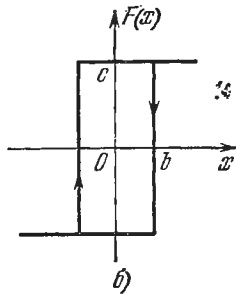
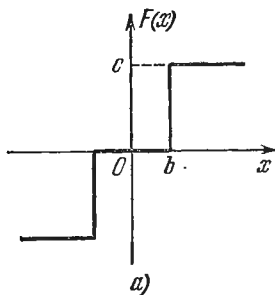


Рис. 2.4.

Рассмотрим теперь частные случаи.

В случае релейной характеристики с зоной нечувствительности без петель (рис. 2.4, а) картина фазовых траекторий будет аналогична изображенной на рис. 2.2, с той разницей, что теперь $b_1 = b_2 = b$, т. е. линии переключения будут прямыми без излома на оси x .

В случае чисто петлевой гистерезисной релейной характеристики (рис. 2.4, б) будет отсутствовать область 2 (рис. 2.2). В этом случае имеем

$$F(x) = \begin{cases} -c & \text{при } x < b, \\ +c & \text{при } x > b, \end{cases}$$

когда

$$y = dx/dt > 0;$$

$$F(x) = \begin{cases} +c & \text{при } x > -b, \\ -c & \text{при } x < -b, \end{cases}$$

когда

$$y = dx/dt < 0.$$

Этим определяются линии переключения (штриховые линии на рис. 2.5). Слова от них строим фазовые траектории по уравнению (2.5), а справа — по уравнению (2.6). Это и показано на рис. 2.5. Поскольку ясно видно, что снаружи фазовые траектории образуют сходящиеся спирали, а изнутри расходящиеся, то где-то среди них должен быть предельный цикл, к которому они все сходятся. Он выделен утолщенной замкнутой линией (рис. 2.5). Это устойчивый предельный цикл, отвечающий автоколебаниям. Амплитуда их определяется точкой пересечения предельного цикла с осью x . Физически такое решение оправдано, ибо в соответствии с нелинейной характеристикой (рис. 2.4, б) реле не имеет равновесного состояния. Автоколебания происходят около петли реле с амплитудой, несколько превышающей половину ширины петли b .

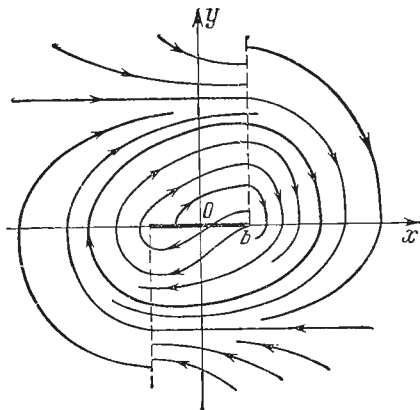


Рис. 2.5.

Установившийся режим работы такой системы автоматического регулирования является автоколебательным. Так работают, например, вибрационные регуляторы на-

пряжения сети постоянного тока. Параметры системы должны быть выбраны так, чтобы амплитуда и частота автоколебаний находились в допустимых пределах.

§ 2.2. Система со скользящим процессом

Проиллюстрируем понятие скользящего процесса на простом примере.

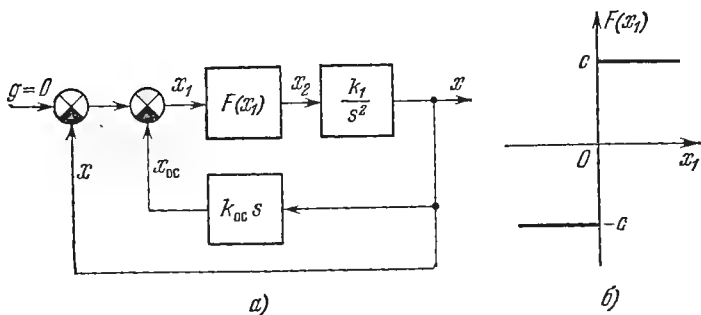


Рис. 2.6.

Пусть задана система автоматического регулирования (рис. 2.6), уравнения динамики которой имеют вид

$$p^2 x = k_1 x_2, \quad x_2 = F(x_1) = c \operatorname{sign} x_1,$$

$$x_1 = -x - x_{oc} = -(1 + k_{oc} p) x.$$

Эти уравнения можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k_1 c \operatorname{sign} (x + k_{oc} y). \quad (2.7)$$

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k_1 c}{y} \operatorname{sign} (x + k_{oc} y). \quad (2.8)$$

Линия переключения на фазовой плоскости (x, y) , следовательно, описывается уравнением

$$y = -\frac{1}{k_{oc}} x. \quad (2.9)$$

Она показана на рис. 2.7. Справа от этой линии $x + k_{oc} y > 0$. Поэтому уравнение фазовых траекторий

(2.8) примет вид

$$y dy = -k_1 c dx,$$

откуда

$$y^2 = -2k_1 c x + C_1.$$

Таким образом, фазовые траектории — это параболы, вершины которых направлены в отрицательную сторону оси x . Положение вершины параболы определяется произвольной постоянной C_1 , т. е. начальными условиями переходного процесса $x(t_0)$, $y(t_0)$. Эти параболы изображены

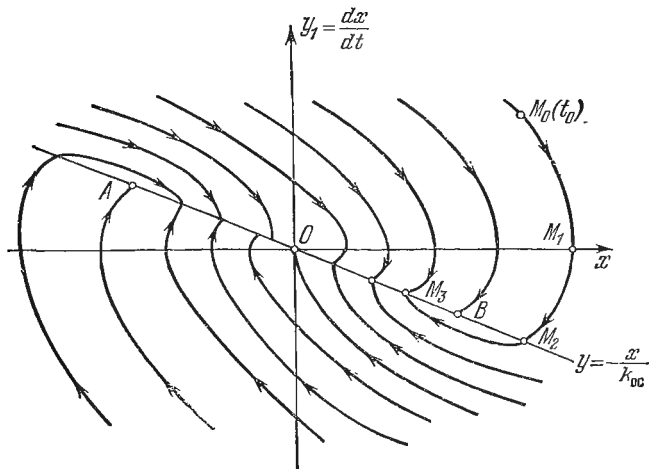


Рис. 2.7.

на рис. 2.7 справа от линии переключения. Направление движения изображающей точки M по параболом определяется прежним правилом (стр. 15, 16, рис. 1.9).

Слева от линии переключения $x + k_0 c y < 0$, и уравнение фазовых траекторий (2.8) имеет вид

$$y dy = k_1 c dx, \quad y^2 = 2k_1 c x + C_2.$$

Эти параболы также изображены на рис. 2.7 слева от линии переключения. Видно, что на отрезке линии переключения AB фазовые траектории встречаются, упираясь в этот отрезок. Это можно расшифровать следующим образом. Пусть процесс идет по фазовой траектории 1 (рис. 2.8). Как только фазовая траектория пересечет

линию переключения OA , вступит в свои права фазовая траектория 2, которая вернет процесс к отрезку OA . Но тут встретится фазовая траектория 3 и т. д. В результате изображающая точка путем вибраций около линии переключения переместится к началу координат O .

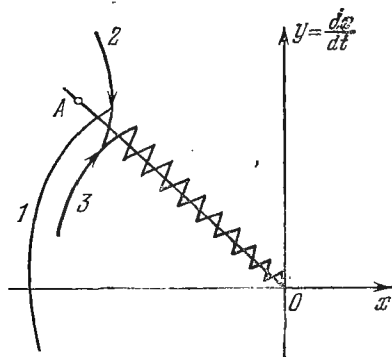


Рис. 2.8.

Такой ход процесса соответствует переключениям релейного элемента (рис. 2.6, б) с большой частотой. Теоретически частота переключения бесконечна, а амплитуда вибраций, изображенных на рис. 2.8, стремится к нулю. Следовательно, теоретически изображающая точка скользит по линии переключения к началу координат — к равновесному состоянию.

Процесс такого рода называется *скользящим процессом*.

Найдем закон движения в скользящем процессе. На линии переключения, согласно (2.9), если учесть первое из уравнений (2.7), имеет место уравнение

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{k_{oc}} x = 0. \quad (2.10)$$

Решением этого уравнения является

$$x = x_0 e^{-t/k_{oc}},$$

где значения $t = 0$ и $x = x_0$ считаются в момент попадания изображающей точки на линию скользящего процесса. Итак, скользящий процесс происходит по экспоненциальному закону.

Здесь важно отметить следующее. Нелинейная система второго порядка (2.7) на участке скользящего процесса вырождается в линейную систему первого порядка (2.10). При этом закон движения в скользящем процессе не зависит от параметров прямой цепи системы и определяется только коэффициентом обратной связи. Например, при

начальном положении M_0 (рис. 2.7) получим фазовую траекторию $M_0M_1M_2M_3$, переходящую в скольжение по линии M_3O . Такой фазовой траектории соответствует процесс во времени $x(t)$, изображенный на рис. 2.9, где, как и ранее, отмечены характерные точки.

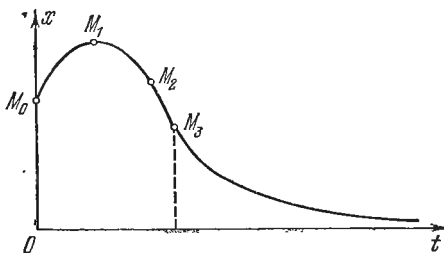


Рис. 2.9.

Найдем положение концов отрезка скользящего процесса A и B на фазовой плоскости (рис. 2.7). Очевидно, что в этих точках касательные к параболам совпадают с линией переключения. Это условие, согласно (2.9), можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{k_{oc}}; \quad (2.11)$$

тогда из уравнения фазовых траекторий (2.8) получим для точек A и B соответственно условие (2.11) в виде

$$-\frac{k_1 c}{y_A} = -\frac{1}{k_{oc}}, \quad y_A = k_1 c k_{oc},$$

$$\frac{k_1 c}{y_B} = -\frac{1}{k_{oc}}, \quad y_B = -k_1 c k_{oc}.$$

Следовательно, отрезок скользящего процесса AB тем больше, чем больше коэффициенты усиления прямой цепи и обратной связи.

2.3. Система с логическим управлением.

Учет временного запаздывания

Рассмотрим автоматическую систему угловой стабилизации объекта в среде без сопротивления (стабилизация аппарата в космосе). Структурная схема системы изобра-

жена на рис. 2.10. Уравнение динамики объекта, т. е. уравнение вращения объекта вокруг своей оси, имеет вид

$$J \frac{d\omega}{dt} = M, \quad (2.12)$$

где J — момент инерции, ω — угловая скорость, M — вращающий момент со стороны системы управления. Будем считать, что вследствие некоторых внешних возмущений объект начал вращаться (например, в результате неидеальности процесса отделения от носителя при запуске), и рассмотрим его стабилизацию с помощью системы управления при отсутствии внешних возмущений.

Система управления (рис. 2.10) состоит из двух измерителей: измерителя угла φ и измерителя угловой скорости ω , с которых сигналы u_1 и u_2 снимаются в релейной форме, показанной на рис. 2.11. Эти сигналы поступают в логическое устройство, вырабатывающее нелинейный закон управления в виде некоторой логической функции

$\Phi(\varphi, \omega)$, которая служит управляющим воздействием на включение и выключение газовых сопел, создающих вращательный момент M .

Логическая управляющая функция $\Phi(\varphi, \omega)$ может быть сформирована в различных видах. В простейшем случае можно сформировать ее, как показано на рис. 2.12, используя для переключений скачки сигналов u_1 и u_2 (рис. 2.11) при $\varphi = \pm b_1$ и $\omega = \pm b_2$. При этом $\Phi = 1$ соответствует созданию управляющего момента в положительном направлении (против часовой стрелки), $\Phi = -1$ — в отрицательном направлении и $\Phi = 0$ — отсутствию момента (все сопла выключены)

Указанный выбор логической функции Φ диктуется следующими соображениями. В нулевой зоне $-b_1 < \varphi < b_1$ (рис. 2.11 и 2.12) сигнала от датчика угла устанавливаем $\Phi = 0$, так как объект находится вблизи требуемого положения $\varphi = 0$, и регулирующее воздействие

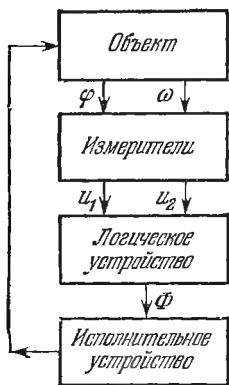


Рис. 2.10.

не требуется. В I квадранте (рис. 2.12) имеем $\varphi > 0$ и $\omega = d\varphi/dt > 0$. Следовательно, угол φ увеличивается во времени — объект уходит от требуемого положения. Здесь устанавливаем $\Phi = -1$ (направление вращающего момента противоположно направлению угловой скорости ω).

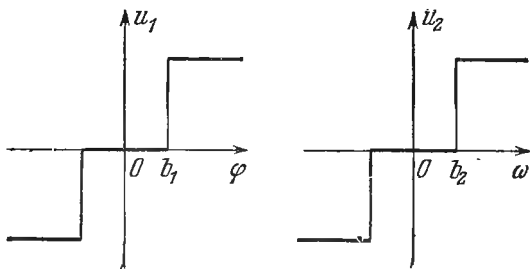


Рис. 2.11.

Аналогично в III квадранте, где знаки φ и ω отрицательные, включается $\Phi = +1$.

Что касается IV квадранта (рис. 2.12), то там $\varphi > 0$, но $\omega = d\varphi/dt < 0$, т. е. объект сам возвращается к требуемому положению $\varphi = 0$. Здесь можно обойтись без управляющего момента. Устанавливаем $\Phi = 0$. Границей между областью $\Phi = -1$ (в I квадранте) и областью $\Phi = 0$ (в IV квадранте) назначаем величину $\omega = -b_2$ (рис. 2.12), когда сигнал с датчика угловой скорости имеет перескок с нуля к отрицательному значению (рис. 2.11). Аналогично поступаем и во II квадранте (рис. 2.12).

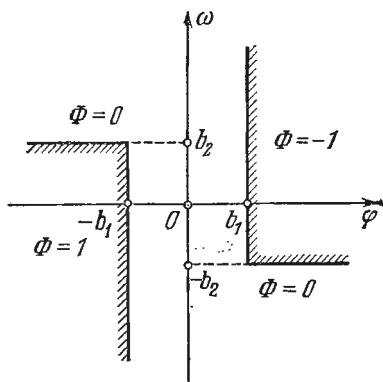


Рис. 2.12.

В соответствии с этой схемой строится логическое устройство (рис. 2.10). Его функционирование можно описать таблицей выходного сигнала Φ в зависимости от входных:

Сигнал u_2 от ω	Сигнал u_1 от φ		
	-	0	+
-	+1	0	0
0	+1	0	-1
+	0	0	-1

Здесь приведен пример простейшей логики формирования закона управления. Можно выбирать и другие, более сложные, в зависимости от требований, предъявляемых к системе по экономичности, точности, быстродействию и т. п.

Рассмотрим *идеальную работу системы управления* (без запаздывания сигналов по всей цепи звеньев). В этом случае уравнение системы управления запишется в виде

$$M = M_1 \Phi(\varphi, \omega), \quad (2.13)$$

где $M_1 = \text{const}$ — величина управляющего момента, который создается включаемыми на постоянную тягу газовыми соплами; $\Phi(\varphi, \omega)$ — логический закон управления, определяемый в данном случае приведенной выше таблицей или согласно графику рис. 2.12.

Общее уравнение системы, согласно (2.12) и (2.13), можно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = c\Phi(\varphi, \omega), \quad c = \frac{M_1}{J}. \quad (2.14)$$

Физический смысл величины c — постоянное угловое ускорение вращения объекта под действием момента M_1 . Дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{c}{\omega} \Phi(\varphi, \omega). \quad (2.15)$$

Фазовую плоскость ограничим по оси абсцисс значениями $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ (рис. 2.13), причем для вращающегося тела точки $\varphi = \pm\pi$ совпадают.*) Этим охватывается полный оборот объекта.

*) Поскольку по оси абсцисс откладываются значения $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$, т. е. значения угла поворота тела вокруг оси, то мы фактически получаем *цилиндрическую фазовую поверхность*, которая здесь развернута на плоскость.

В области, где $\Phi = -1$ (рис. 2.13), уравнения (2.15) принимают вид

$$\omega d\omega = -c d\varphi,$$

вследствие чего фазовые траектории являются параболами:

$$\omega^2 = -2c\varphi + C_1. \quad (2.16)$$

В области, где $\Phi = +1$, имеем фазовые траектории

$$\omega^2 = 2c\varphi + C_2. \quad (2.17)$$

Наконец, в области, где $\Phi = 0$, получаем прямые линии

$$\omega = C_3. \quad (2.18)$$

Все указанные траектории приведены на рис. 2.13.

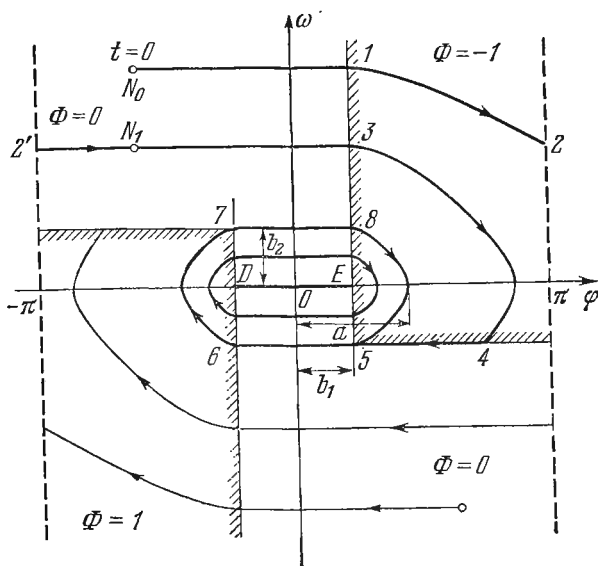


Рис. 2.13.

Рассмотрим ход процесса. Пусть начальные условия определяются точкой N_0 (рис. 2.13). Процесс пойдет согласно фазовой траектории $N_0 - 1 - 2$. Точка 2 ($\varphi = +\pi$) при вращении совпадает с точкой Z' ($\varphi = -\pi$).

Поэтому дальше процесс пойдет в соответствии с фазовой траекторией 2—3—4—5. Как видно из рис. 2.13, точка N_1 , в которой угол φ равен начальному (в точке N_0), означает, что объект совершил один полный оборот. Затем (траектория N_1 —3—4—5) он начал колебательное движение около своей оси. Начиная с точки 5, получаем замкнутую фазовую траекторию 5—6—7—8—5. Следовательно, объект входит в установившийся автоколебательный режим с амплитудой

$$a = b_1 + \frac{b_2^2}{2c}. \quad (2.19)$$

Своеобразие этого предельного цикла состоит, во-первых, в том, что снаружи фазовые траектории приближаются к нему не асимптотически, как было ранее в других задачах, а за конечное число колебаний (и за конечное время). В описанном выше процессе это было за один оборот плюс один размах колебания. Своеобразие этого предельного цикла заключается также в том, что фазовые траектории внутри него тоже замкнутые и окружают отрезок равновесия DE . Поэтому при малых начальных отклонениях, лежащих внутри предельного цикла, получаются периодические колебания, определяемые начальными условиями. В частности, состояние равновесия, возможное только при $\omega_0 = 0$ и $-b_1 < \varphi_0 < b_1$, не является устойчивым. Особый отрезок DE имеет здесь свойства, аналогичные особой точке типа «центр» (рис. 1.17). Итак, установившимся режимом в данной системе являются автоколебания с амплитудой (2.19).

Введем теперь в рассмотрение *временное запаздывание в системе управления*. Пусть τ_1 — величина запаздывания при включении газовых сопел, а τ_2 — при их выключении ($\tau_2 > \tau_1$). Поскольку к линии включения сопел $\varphi = b_1$ (рис. 2.13) объект подходит с постоянной скоростью (горизонтальные фазовые траектории), то за счет запаздывания включения сопел τ_1 он перейдет за эту линию на величину $\Delta\varphi = \omega\tau_1$. Это значит, что линия включения займет теперь в координатах (φ, ω) наклонное положение (рис. 2.14). Аналогично и в III квадранте.

К линии же выключения сопел $\omega = -b_2$ объект подходит с постоянным ускорением $-c$ (параболическая фа-

вовая траектория). Поэтому за счет запаздывания выключения сопел τ_2 он перейдет за эту линию на величину $\Delta\omega = -c\tau_2$. Следовательно, линия выключения сопел $\omega = -b_2$ сместится вниз (рис. 2.14). Аналогично в левой полуплоскости линия выключения $\omega = b_2$ сместится вверх на величину $\Delta\omega = c\tau_2$.

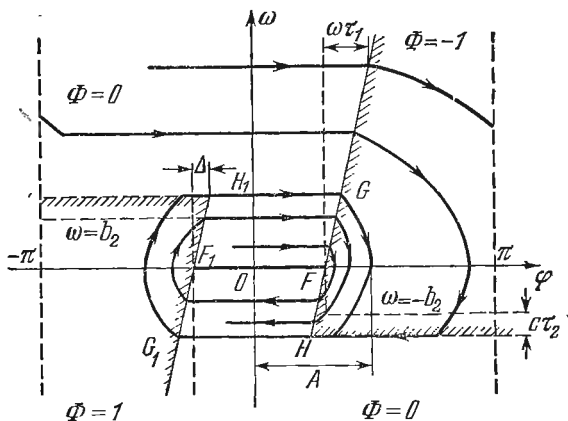


Рис. 2.14.

В соответствии с этим на рис. 2.14 нанесены фазовые траектории. Видно, что предельный цикл за счет запаздываний увеличился в размерах. Амплитуда его

$$A = b_1 + (b_2 + c\tau_2)\tau_1 + \frac{(b_2 + c\tau_2)^2}{2c} \quad (2.20)$$

вместо прежней (2.19).

Изменится картина фазовых траекторий и внутри предельного цикла. Там включение сопел будет происходить на линиях FG и F_1G_1 . Выключение же — на линиях FH и F_1H_1 , которые получаются от перехода парабол за линии $\varphi = \pm b_1$ на $\Delta\omega = \mp c\tau_2$ соответственно, причем отрезок Δ (рис. 2.14) определяется по формуле

$$\Delta = \frac{(b_2 + c\tau_2)^2}{2c} - \frac{b_2^2}{2c} = b_2\tau_2 + \frac{c}{2}\tau_2^2.$$

В результате внутри предельного цикла получаются расходящиеся спиралевидные фазовые траектории. Это соот-

ветствует расходящимся колебаниям системы, переходящим в предельный цикл. Здесь, как и в предыдущем случае, система попадает в автоколебательный режим извне не асимптотически, а за конечное число колебаний.

Рассмотренный подход к учету на фазовой плоскости временного запаздывания в системе эквивалентен в какой-то степени исследованию некоторых свойств системы выше второго порядка. Примерно таким же образом может влиять на поведение системы учет постоянных времени в системе управления.

Аналогичным способом можно производить учет временного запаздывания и в релейных системах автоматического управления.

§ 2.4. Системы с переменной структурой

Переменная структура системы дает дополнительные возможности получения различных желаемых процессов автоматического управления и регулирования. Допустим,



Рис. 2.15.

в системе предусмотрены две разные структуры, различающиеся звеньями 1 и 2 (рис. 2.15). Имеется логическое переключающее устройство, которое в зависимости от размеров и знака входной величины x (или пары входных величин) подключает либо звено 1, либо звено 2.

Рассмотрим переходный процесс (без внешнего воздействия). Пусть измерительное и исполнительное устройства идеальные и вместе с регулируемым объектом описываются передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{s^2}.$$

Звенья же 1 и 2 характеризуются коэффициентами усиления k_1 и k_2 соответственно. Тогда уравнение динамики замкнутой системы при включении звена 1 запишется в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 kx = 0, \quad (2.21)$$

а при включении звена 2:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_2 kx = 0. \quad (2.22)$$

Каждое из этих уравнений является уравнением неустойчивой системы. Картины фазовых траекторий в соответствии с § 1.3 показаны на рис. 2.16, а и б соответственно.

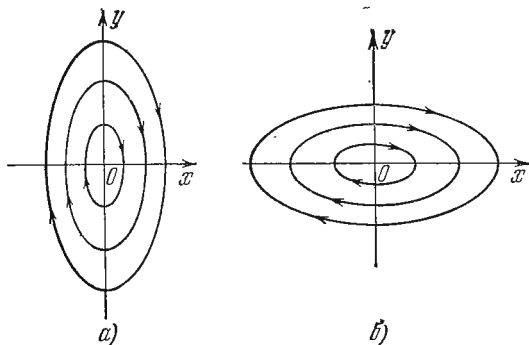


Рис. 2.16.

Обозначим $dx/dt = y$. Введем следующий закон переключений. Пусть звено 1 включается при $xy > 0$, а звено 2 — при $xy < 0$, т. е. имеем уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 kx = 0 \quad \text{при} \quad xy > 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_2 kx = 0 \quad \text{при} \quad xy < 0.$$

В этом случае в I квадранте фазовой плоскости (x, y) берется дуга эллипса из рис. 2.16, а; в IV квадранте — из рис. 2.16, б; в III — снова из рис. 2.16, а и т. д. Как

видно по рис. 2.17, получается затухающий колебательный процесс, т. е. за счет переменности структуры система становится устойчивой.

Такой колебательный процесс не всегда приемлем. Поэтому чаще всего в системах с переменной структурой стремятся организовать скользящий апериодический процесс.

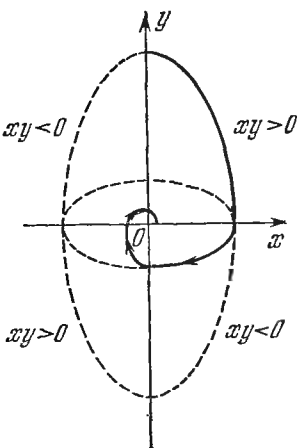


Рис. 2.17.

Рассмотрим это на конкретном примере. Пусть в той же системе (рис. 2.15) звено 1 имеет коэффициент усиления k_1 , а звено 2 — коэффициент усиления — k_1 (усиление с переменной знака сигнала). Пусть при этом в переключающем устройстве формируется величина

$$x_1 = y + cx. \quad (2.23)$$

Переключения в системе установим так, чтобы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 kx = 0 \quad \text{при} \quad x_1 x > 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k_1 kx = 0 \quad \text{при} \quad x_1 x < 0. \quad (2.25)$$

Тогда линиями переключения будут: ось y и прямая

$$y = -cx, \quad (2.26)$$

обозначенная на рис. 2.18 волнистой линией.

Согласно (2.24) в областях, где $xx_1 > 0$ (т. е. в правой полуплоскости — над линией переключения, в левой — под ней), фазовые траектории будут эллипсами. В остальных областях, где $xx_1 < 0$ — гиперболами (см. § 1.3). Они и показаны на рис. 2.18. На рисунке видно, что все фазовые траектории встречаются на линии переключения $y = -cx$. Это и означает наличие скользящего процесса (аналогично примеру в § 2.2). Но, в отличие от случая, описанного в § 2.2, здесь линия скользящего процесса не ограничена. Поэтому при любых начальных условиях система входит в режим скользящего процесса без предварительных колебаний. Этот процесс, согласно (2.26), описывается

уравнением

$$\frac{dx}{dt} + cx = 0, \quad x = x_0 e^{-ct},$$

где значения $t = 0$ и $x = x_0$ определяются моментом попадания изображающей точки на линию скользящего процесса.

Заметим, что форма скользящего процесса зависит от параметра c управляющего устройства и не зависит от

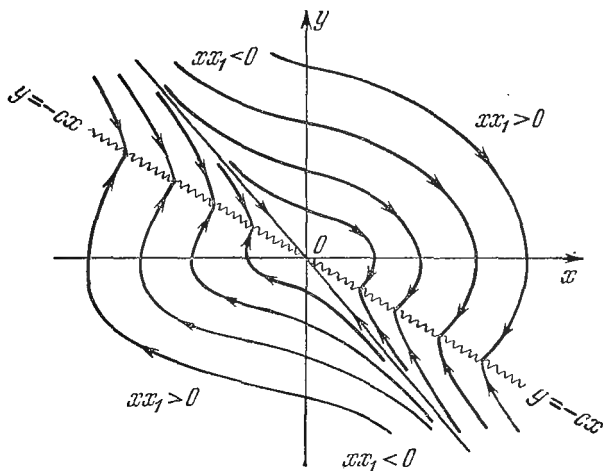


Рис. 2.18.

параметров k и k_1 основной части системы. Это весьма важное свойство скользящего режима обусловило то, что при построении систем с переменной структурой стремятся сформировать управление таким образом, чтобы обеспечивался именно скользящий процесс. Ниже, в главе 7, будут рассмотрены системы с переменной структурой высокого порядка.

Данная глава была посвящена изображению переходных процессов в нелинейных системах на фазовой плоскости. Вместе с тем на примерах были изучены различные типы нелинейных систем и характерные особенности их поведения в переходных процессах, которые коренным образом отличают их от поведения линейных систем.

§ 3.1. Метод припасовывания

Часто нелинейные системы представляются как *кусочно-линейные*, т. е. их динамические свойства описываются линейными дифференциальными уравнениями, разными для разных участков процесса управления. Такowymi, например, были все нелинейные системы, рассмотренные в предыдущей главе.

Метод припасовывания состоит в том, что *линейные* дифференциальные уравнения решаются в общем виде отдельно для каждого участка процесса, на котором они справедливы. Затем на каждом участке в полученных решениях произвольные постоянные определяются таким образом, чтобы все соседние участки правильно состыковывались друг с другом. Это делается следующим образом: по заданным начальным условиям процесса определяются произвольные постоянные в общем решении для первого участка. Значения фазовых координат в конце первого участка служат начальными условиями для второго участка и т. д.

Вообще говоря, описанная схема метода припасовывания может быть применена и тогда, когда какой-либо участок описывается *нелинейным* дифференциальным уравнением при условии, что известно его общее решение.

Проиллюстрируем на простом примере использование метода припасовывания для определения переходного процесса и для определения периодического решения (автоколебаний). Дана система, схема которой изображена на рис. 3.1, а, нелинейная характеристика $F(x)$ регулятора представлена на рис. 3.1, б. Уравнение объекта:

$$(T_1 p + 1)x = -k x_1,$$

уравнение регулятора:

$$p x_1 = F(x).$$

Общее уравнение замкнутой системы имеет вид

$$T_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_1 F(x). \quad (3.1)$$

Определение переходного процесса. Представим себе примерно возможный качественный вид процесса

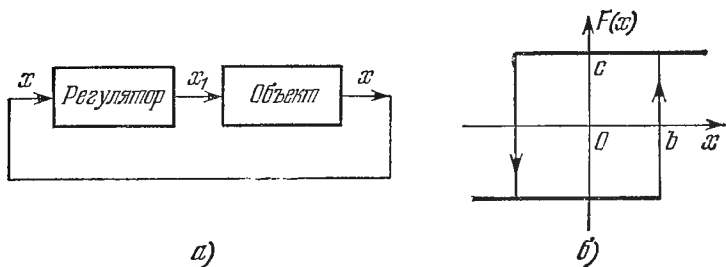


Рис. 3.1.

(рис. 3.2). Он разбивается на участки AB , BD и т. д., внутри которых в соответствии с нелинейной характери-

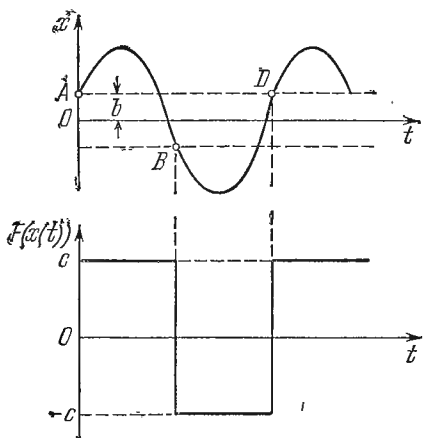


Рис. 3.2.

стикой функция $F(x)$ принимает постоянные значения $+c$ или $-c$. Изобразим отдельно участки AB и BD (рис. 3.3), отсчитывая время t на каждом из них от нуля.

На участке AB , согласно (3.1), уравнение системы

$$T_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k c$$

имеет первый интеграл в виде

$$\frac{dx}{dt} = C_1 e^{-t/T_1} - kc, \quad (3.2)$$

а второй —

$$x = -T_1 C_1 e^{-t/T_1} - kct + C_2. \quad (3.3)$$

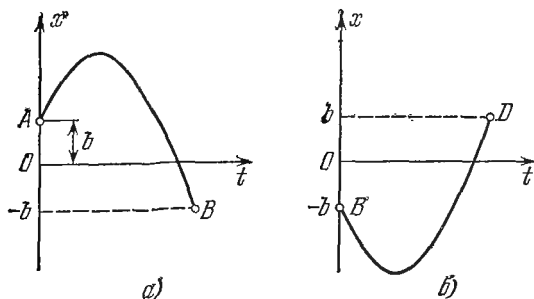


Рис. 3.3.

Начальные условия: $t = 0$, $x = b$, $dx/dt = \dot{x}_A$. По ним из (3.2) и (3.3) находим

$$C_1 = \dot{x}_A + kc, \quad C_2 = b + T_1 C_1. \quad (3.4)$$

На участке BD , согласно (3.1), имеем

$$T_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = kc.$$

Первый интеграл этого уравнения

$$\frac{dx}{dt} = C_3 e^{-t/T_1} + kc, \quad (3.5)$$

а второй —

$$x = -T_1 C_3 e^{-t/T_1} + kct + C_4. \quad (3.6)$$

Начальные условия для участка BD (в точке B) определяются на основании решения относительно точки B

уравнения для предыдущего участка AB . Из (3.2) находим

$$\dot{x}_B = C_1 e^{-t_B/T_1} + kc, \quad (3.7)$$

где C_1 известно из (3.4), а величина t_B определяется из уравнения (3.3) при условии $x_B = -b$, т. е.

$$-b = -T_1 C_1 e^{-t_B/T_1} - kct_B + C_2,$$

где C_2 известно из (3.4). Отсюда определяем t_B и полученное значение подставляем в формулу (3.7).

Таким образом, начальные условия для участка BD имеют вид

$$t = 0, \quad x = -b, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}_B$$

и, согласно (3.5), (3.6), получаем

$$C_3 = \dot{x}_B - kc, \quad C_4 = -b + T_1 C_3.$$

На следующем за точкой D участке снова, как и на AB , будет решаться уравнение

$$T_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k \varphi;$$

при этом произвольные постоянные определяются с учетом координат конца предыдущего участка BD и т. д.

Определение периодического решения (автоколебаний). В этом случае расстояние AD по оси времени (рис. 3.2) является периодом автоколебаний. Вся кривая ABD после точки D должна повторяться в точности в том же виде. Вследствие нечетной симметрии характеристики (рис. 3.1, б) должна иметь место нечетная симметрия и полупериодов AB и BD . Поэтому для определения периодического решения (автоколебаний) достаточно рассмотреть один полупериод — участок AB .

Обозначим через T *полупериод* искомых автоколебаний. В силу периодичности решения начало и конец участка AB должны удовлетворять равенствам

$$\dot{x}_B = -\dot{x}_A, \quad x_B = -x_A = -b \text{ при } t = T. \quad (3.8)$$

Первое условие, согласно (3.2), принимает вид

$$C_1 e^{-T/T_1} - kc = -(C_1 - kc),$$

откуда

$$C_1 = \frac{2kc}{1 + e^{-T/T_1}}. \quad (3.9)$$

Второе условие (3.8), согласно (3.3), запишется в виде

$$-b = -T_1 C_1 e^{-T/T_1} - kcT + C_2, \quad C_2 = b + T_1 c,$$

или

$$T_1 C_1 (1 - e^{-T/T_1}) - kcT = -2b.$$

Подставив сюда выражение для C_1 из (3.9), придем к уравнению

$$\operatorname{th} \frac{T}{2T_1} = \frac{T}{2T_1} - \frac{b}{kcT_1} \quad (3.10)$$

с одной неизвестной величиной — полупериодом T .

Трансцендентное уравнение (3.10) легко решается графически. Обозначим

$$\frac{T}{2T_1} = y, \quad \frac{b}{kcT_1} = b_1, \quad z_1 = \operatorname{th} y, \quad z_2 = y - b_1.$$

Кривые z_1 и z_2 , согласно этим равенствам, изображены на рис. 3.4. Решением уравнения (3.10) будет точка $z_1 = z_2$,

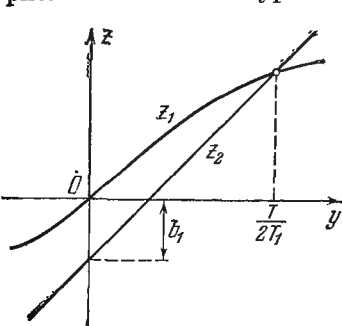


Рис. 3.4.

т. е. точка пересечения кривых z_1 и z_2 (рис. 3.4). Отсюда находим полупериод T автоколебаний. Частота автоколебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}.$$

Амплитуда автоколебаний определится как $x_{\max}$ на участке AB (рис. 3.2), т. е. из условия $dx/dt = 0$. При этом из (3.2)

$$C_1 e^{-t_m/T_1} = kc, \quad (3.11)$$

где C_1 определяется формулой (3.9), а t_m — время t в точке максимума пока неизвестно. Из (3.11) с учетом (3.9) находим

$$e^{-t_m/T_1} = \frac{1}{2} (1 + e^{-T/T_1})_x$$

откуда

$$t_m = -T_1 \ln \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-T/T_1}) \right].$$

Далее по формуле (3.3) определим амплитуду автоколебаний:

$$a = x_{\max} = -T_1 C_1 e^{-t_m/T_1} - kct_m + b + T_1 C_1,$$

где C_1 известно из (3.9). В результате формула

$$a = kcT_1 \left\{ \operatorname{th} \frac{T}{2T_1} + \ln \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-T/T_1}) \right] \right\} + b$$

позволяет вычислить и амплитуду автоколебаний.

§ 3.2. Метод точечного преобразования

Изложенный выше метод припасовывания связан со сложностями увязывания начальных условий каждого участка с получаемыми данными в конце предыдущего участка. Метод точечного преобразования представляет собой усовершенствование метода припасовывания с привлечением геометрических представлений в фазовом пространстве.

Запишем в общем виде уравнения динамики нелинейной системы второго порядка без внешнего воздействия:

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = F_2(x, y). \quad (3.12)$$

На фазовой плоскости (x, y) возьмем какой-нибудь отрезок линии AB , который пересекается фазовыми траекториями в одном направлении (рис. 3.5). Обозначим через s координату произвольной точки Q на отрезке AB , отсчитываемую вдоль дуги AB от начала A .

Пусть решение уравнений (3.12) $x = x(t)$, $y = y(t)$ дает фазовую траекторию, проходящую через точку Q . Допустим далее, что с увеличением t эта фазовая траектория снова пересечет отрезок AB в некоторой другой точке Q' (рис. 3.5). Координату точки Q' по дуге AB обозначим s' .

Точка Q' (первого следующего пересечения отрезка AB той же фазовой траекторией) называется *последующей* по отношению к *исходной* точке Q . Зависимость

$$s' = f(s), \quad (3.13)$$

соответствующая ходу фазовой траектории в силу решения уравнений (3.12), называется *функцией последования*. Функция последования определяет закон точечного преобразования для данной нелинейной системы.

Определение последующих точек по заданным исходным на отрезке AB и называется *точечным преобразованием отрезка AB самого в себя*. Ввиду непрерывности

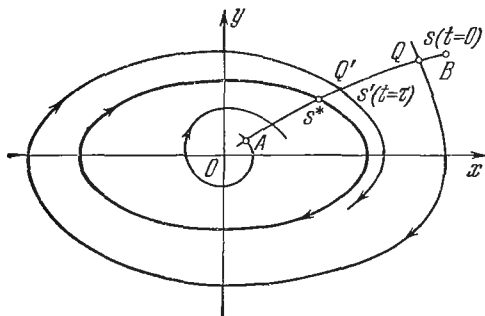


Рис. 3.5.

расположения фазовых траекторий исходные и последующие точки заполняют весь отрезок. Однако каждая точка отрезка AB не обязательно имеет последующую *внутри* этого отрезка. Фазовые траектории, пересекающие отрезок, могут и не возвращаться к нему.

Возможен такой случай, что последующая точка Q' совпадает с исходной Q , т. е.

$$f(s) = s = s^*, \quad (3.14)$$

При этом мы получаем замкнутую фазовую траекторию (рис. 3.5): предельный цикл или кривую, соответствующую особой точке типа «центр», и т. п. Последнее выясняется из хода соседних фазовых траекторий. Случай (3.14) называется *точечным преобразованием точки Q самой в себя*. Это неподвижная точка в общем точечном преобразовании отрезка AB .

Изобразим графически функцию последования $s' = f(s)$ (рис. 3.6). Проведем из начала координат наклонную прямую под углом 45° (биссектрису координатного угла). Если она пересечется с кривой $f(s)$, то эта точка

пересечения даст координату s^* (рис. 3.6) замкнутой фазовой траектории.

Ход точечного преобразования прослеживается на этом графике следующим образом. Возьмем исходную точку s правее точки s^* (рис. 3.6). Точке s соответствует определенное значение s' (точка N) на кривой $f(s)$. Таким

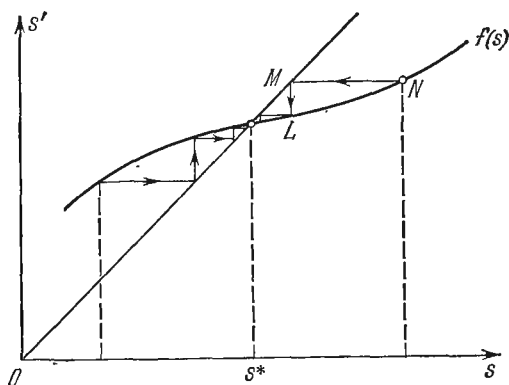


Рис. 3.6.

образом, мы нашли координату последующей точки. Теперь примем ее за новую исходную точку. Для этого достаточно снести полученную точку N по горизонтали NM (рис. 3.6) на биссектрису. Проведя далее из точки M вертикаль ML , найдем значение координаты s' новой последующей точки и т. д. Из этого простого построения видно, что в данном случае процесс сходится к предельному циклу s^* .

Возьмем теперь исходную точку s левее s^* и точно тем же способом проследим ход точечного преобразования, как показано стрелками на рис. 3.6. Очевидно, этот процесс тоже сходится к тому же предельному циклу s^* . Следовательно, здесь мы имеем устойчивый предельный цикл (автоколебания).

Отсюда условие устойчивости предельного цикла имеет вид

$$\left(\frac{ds'}{ds} \right)_{s=s^*} < 1. \quad (3.15)$$

В противном случае, изображенном на рис. 3.7, а (где стрелками показан ход точечного преобразования), получается неустойчивый предельный цикл. На других графиках рис. 3.7 показаны: б) случай двух предельных

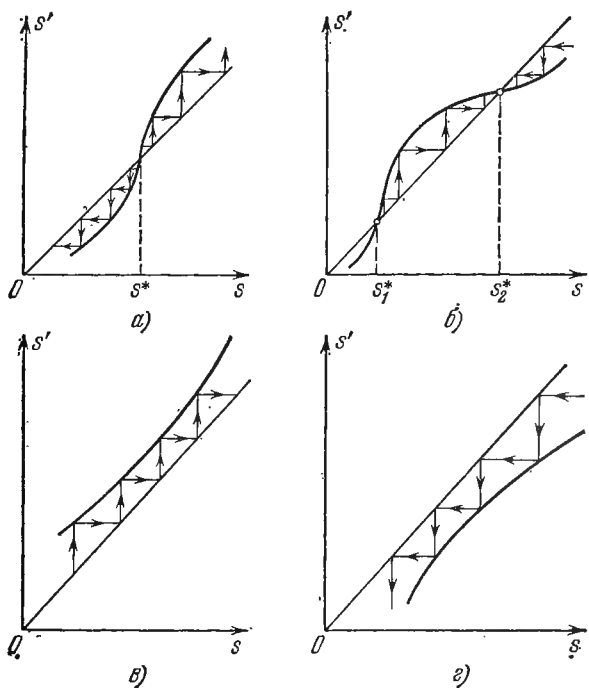


Рис. 3.7.

циклов, из которых один неустойчивый, а второй устойчивый; в) случай расходящихся колебаний; г) случай затухающих колебаний.

Такого типа графики (рис. 3.6, 3.7) называются *диаграммами точечного преобразования*. Изображение хода точечного преобразования на такой диаграмме эквивалентно сопряжению начальных и конечных условий соседних участков в методе припасовывания. Но производится это специальным и довольно простым геометрическим построением. Это будет видно нагляднее на примерах § 3.3.

Основным в методе является нахождение функции последования $s' = f(s)$ на основе решения уравнений динамики системы (3.12). Найти эту функцию в явной форме не всегда легко. В большинстве случаев бывает легче представить функцию последования в параметрической форме.

Параметрическая форма точечного преобразования в качестве параметра содержит время τ прохождения изображающей точки по фазовой траектории от исходной точки Q (рис. 3.5) до ее последующей Q' . Через этот параметр τ на основании решения уравнений (3.12) выражаются координаты точек Q и Q' , а именно

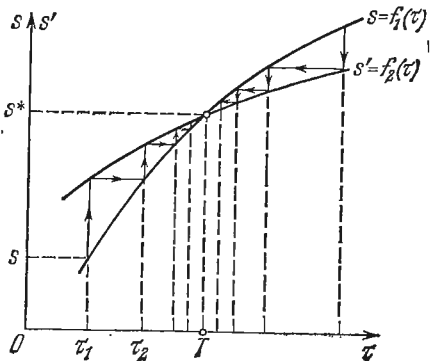


Рис. 3.8.

$$s = f_1(\tau), \quad s' = f_2(\tau). \quad (3.16)$$

Строятся графики этих функций (рис. 3.8). Точка пересечения их дает координату $s' = s = s^*$ замкнутой фазовой траектории (предельного цикла), причем абсцисса этой точки определяет период T соответствующих колебаний системы. Условие устойчивости предельного цикла сохраняется в виде (3.15), но с дифференцированием s' и s по параметру τ в (3.16). Изображенный на рис. 3.8 случай соответствует устойчивому предельному циклу.

Ход точечного преобразования на такой параметрической диаграмме прослеживается следующим образом. Берем некоторую исходную точку на кривой s (рис. 3.8). Перемещаемся по вертикали до кривой s' , находя тем самым последующую точку при том же значении параметра $\tau = \tau_1$ (это будет время движения изображающей точки по фазовой траектории от Q до Q' на рис. 3.5). Затем найденную последующую точку принимаем за новую исходную, для чего по горизонтали (рис. 3.8) переносим ее

на кривую s . После этого переходим снова на кривую s' уже при новом значении $\tau = \tau_2$ и т. д. Весь ход точечного преобразования показан на рис. 3.8 стрелками.

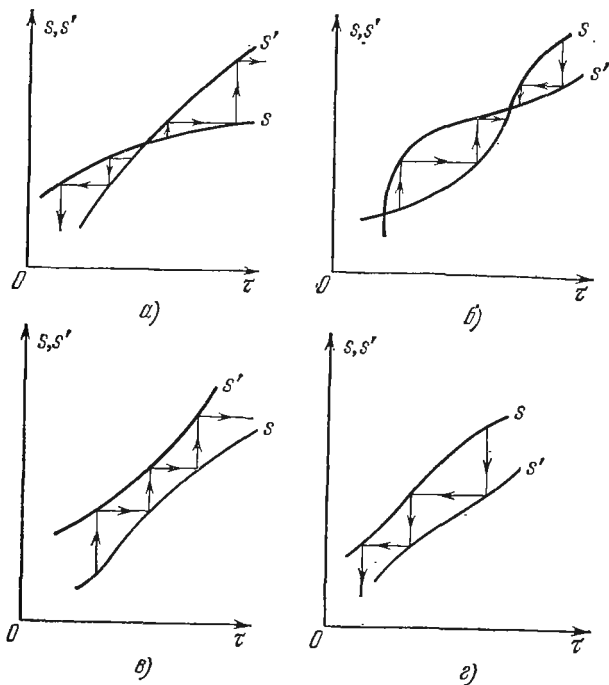


Рис. 3.9.

Рис. 3.9 иллюстрирует параметрические диаграммы точечного преобразования для тех же четырех случаев, что и на рис. 3.7.

§ 3.3. Примеры точечного преобразования

В качестве первого примера рассмотрим ту же систему, что и при разборе метода припасовывания (§ 3.1). Уравнения объекта и регулятора имеют вид

$$(T_1 p + 1)x = -k_1 x_1, \quad p x_1 = F(x),$$

где $F(x)$ — гистерезисная релейная характеристика (рис. 3.10). Эту систему уравнений перепишем в виде

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = -k_1 F(x), \quad \frac{dx}{dt} = y. \quad (3.17)$$

На фазовой плоскости (x, y) нанесем линии переключения, соответствующие заданной нелинейной характеристике (рис. 3.10): $x = b$ при $y > 0$, $x = -b$ при $y < 0$. Это будут полупрямые Π_0 и Π_1 (рис. 3.11).

Ввиду нечетной симметрии характеристики $F(x)$ можно рассматривать только участок фазовой траектории QQ_1 , идущий от полупрямой Π_0 до Π_1 , так как закон возвращения этой траектории к линии Π_0 будет аналогичен. Таким образом, будем рассматривать точечное преобразование полупрямой Π_0 в полупрямую Π_1 (а не саму Π_0 в себя, как ранее). При этом исходная точка Q имеет последующую Q_1 .

Пусть в точке Q будет $t = 0$, а в точке Q_1 обозначим $t = \tau$. На участке фазовой траектории QQ_1 имеем $F(x) = c$. Поэтому уравнения (3.17) принимают вид

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = -k_1 c, \quad \frac{dx}{dt} = y.$$

Интегрирование их дает

$$y = C_1 e^{-t/T_1} - k_1 c, \quad (3.18)$$

$$x = -T_1 C_1 e^{-t/T_1} - k_1 c t + C_2. \quad (3.19)$$

Используем здесь параметрический способ точечного преобразования. Обозначим ординаты точек Q и Q_1 через y_0 и y_1 соответственно. Закон точечного преобразования будем искать в виде функций $y_0(\tau)$, $y_1(\tau)$. При начальных условиях (точка Q) $t = 0$, $x = b$, $y = y_0$ определяются произвольные постоянные в (3.18) и (3.19):

$$C_1 = y_0 + k_1 c, \quad C_2 = b + T_1(y_0 + k_1 c).$$

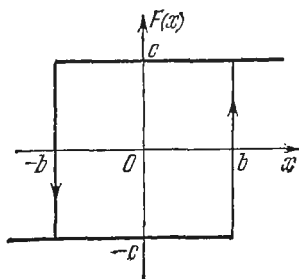


Рис. 3.10.

В точке Q_1 имеем $t = \tau$, $x = -b$, $y = y_1$. Подставляя эти величины в уравнение (3.18), получаем

$$y_1 = (y_0 + k_1 c) e^{-\tau/T_1} - k_1 c, \quad (3.20)$$

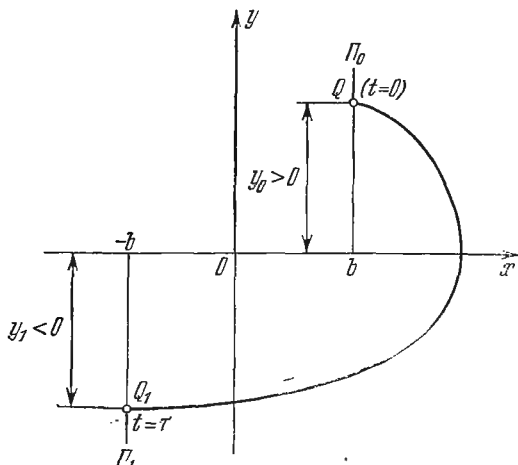


Рис. 3.11.

а подстановка в уравнение (3.19) дает

$$-b = -T_1(y_0 + k_1 c) e^{-\tau/T_1} - k_1 c \tau + b + T_1(y_0 + k_1 c).$$

Из последнего уравнения непосредственно находим

$$y_0 = \frac{k_1 c \tau - 2b}{T_1(1 - e^{-\tau/T_1})} - k_1 c. \quad (3.21)$$

Тогда из (3.20) с учетом (3.21) получим

$$y_1 = \frac{k_1 c \tau - 2b}{T_1(1 - e^{-\tau/T_1})} e^{-\tau/T_1} - k_1 c. \quad (3.22)$$

Формулы (3.21) и (3.22) и являются искомым законом точечного преобразования в параметрической форме.

Построим диаграмму (рис. 3.12) точечного преобразования в виде кривых $y_0(\tau)$ и $y_1(\tau)$. (Переменная y_1 берется по абсолютному значению, так как она отрицательна). Здесь в одном графике отражено все протекание переходного процесса (обозначено стрелками) и периоди-

ческое решение — точка пересечения кривых. При этом в переходном процессе найдены последовательные значения ординат y_0 и y_1 , а также времена τ движения на

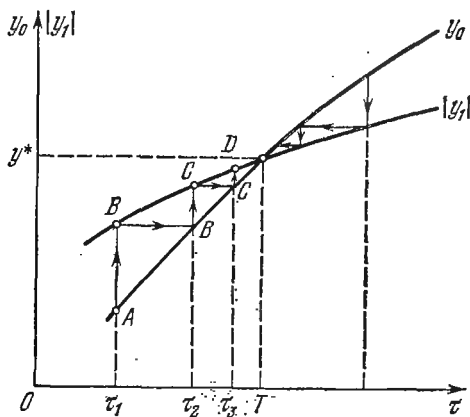


Рис. 3.12.

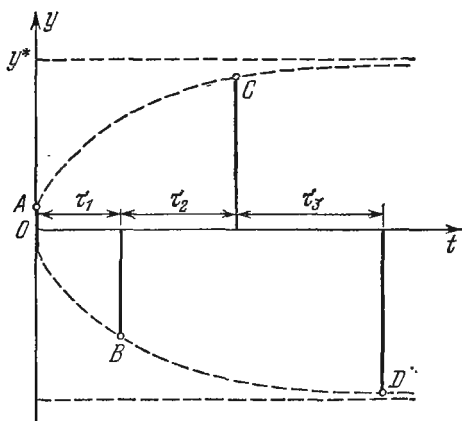


Рис. 3.13.

каждом участке, а в периодическом режиме — амплитуда y^* и полупериод T .

На рис. 3.13 показаны точки образующей переходных колебаний, взятые из диаграммы точечных преобразова-

ний (рис. 3.12). Дальше эти точки соединяются экспонентами (рис. 3.14) согласно уравнению (3.18). Таким образом, в виде единого простого геометрического построения здесь решается вся задача припасовывания решений по

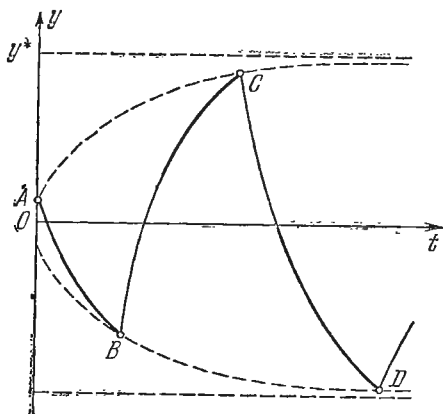


Рис. 3.14.

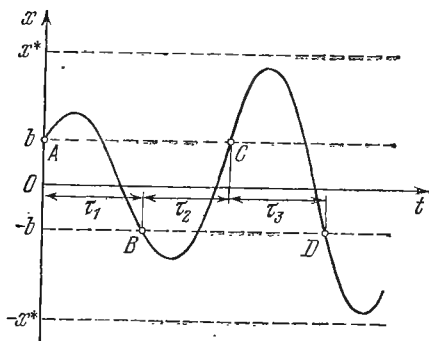


Рис. 3.15.

участкам для переменной y . Затем, имея длины участков $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ и зная, что на границах участков $x = \pm b$, легко по уравнению (3.19) построить также и кривую переходного процесса для переменной x (рис. 3.15, где x^* — амплитуда автоколебаний).

Аналогично получается и затухающий процесс (выше точки y^* , рис. 3.12).

В качестве второго примера возьмем ту же систему (3.17), но с релейной характеристикой общего вида (рис. 3.16). Здесь на фазовой плоскости получаем четыре линии переключения (рис. 3.17). Ввиду нечетной симметрии характеристики $F(x)$ достаточно рассмотреть

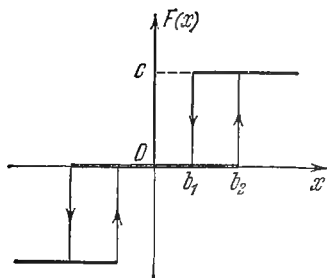


Рис. 3.16.

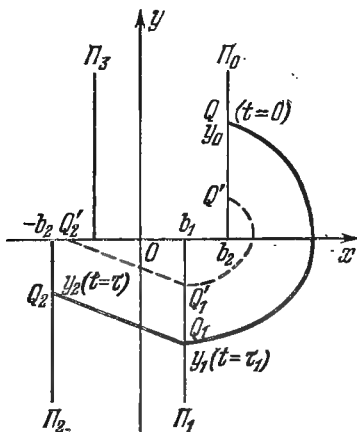


Рис. 3.17.

участок фазовой траектории QQ_1Q_2 , идущий от линии Π_0 через Π_1 до линии Π_2 . При этом часть Q_1Q_2 фазовой траектории будет прямолинейной, так как там $F(x) = 0$, и в силу (3.17)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1}, \quad y = -\frac{x}{T_1} + C_3. \quad (3.23)$$

Итак, будем рассматривать точечное преобразование полупрямой Π_0 в полупрямую Π_2 при условии, что последующая точка Q_2 находится на линии Π_2 . Но существуют фазовые траектории $Q'Q'_1Q'_2$ у которых последующая точка Q_2 находится не на линии Π_2 , а на отрезке $-b_2 < x < b_1$. Следовательно, надо будет также рассмотреть точечное преобразование части полупрямой Π_0 и в этот отрезок.

Начнем с первого случая (QQ_1Q_2). На участке QQ_1 , где $F(x) = c$, имеем решения уравнений (3.17) в виде

$$y_1 = C_1 e^{-t/T_1} - k_1 c, \quad x = -T_1 C_1 e^{-t/T_1} - k_1 c t + C_2. \quad (3.24)$$

В силу начальных условий $t = 0$, $x = b_2$, $y = y_0$ находим

$$C_1 = y_0 + k_1 c, \quad C_2 = b_2 + T_1(y_0 + k_1 c).$$

В точке Q_1 имеем: $t = \tau_1$, $x = b_1$, $y = y_1$. Поэтому из (3.24) получаем

$$y_1 = (y_0 + k_1 c) e^{-\tau_1/T_1} - k_1 c,$$

$$b_1 = -T_1(y_0 + k_1 c) e^{-\tau_1/T_1} - k_1 c \tau_1 + b_2 + T_1(y_0 + k_1 c),$$

откуда находим

$$y_0 = \frac{k_1 c \tau_1 + b_1 - b_2}{T_1(1 - e^{-\tau_1/T_1})} - k_1 c, \quad (3.25)$$

$$y_1 = \frac{k_1 c \tau_1 + b_1 - b_2}{T_1(1 - e^{-\tau_1/T_1})} e^{-\tau_1/T_1} - k_1 c. \quad (3.26)$$

Используем далее уравнение (3.23) для участка траектории $Q_1 Q_2$. С учетом начальных условий

$$t = \tau_1, \quad x = b_1, \quad y = y_1 \quad (3.27)$$

найдем произвольную постоянную

$$C_3 = y_1 + \frac{b_1}{T_1}. \quad (3.28)$$

В точке Q_2 имеем $t = \tau$, $x = -b_2$, $y = y_2$. Поэтому из (3.23) получаем

$$y_2 = y_1 + \frac{b_1 + b_2}{T_1}, \quad (3.29)$$

или, согласно (3.26),

$$y_2 = \frac{k_1 c \tau_1 + b_1 - b_2}{T_1(1 - e^{-\tau_1/T_1})} e^{-\tau_1/T_1} - k_1 c + \frac{b_1 + b_2}{T_1}. \quad (3.30)$$

Мы получили параметрические выражения (через параметр τ_1) ординат исходной y_0 (3.25) и последующей y_2 (3.30) точек. Это позволяет построить диаграмму точечного преобразования в параметрической форме (рис. 3.18). Параметр τ_1 в данном случае обозначает не все время движения от Q_1 до Q_2 , а лишь время движения для траектории (QQ_1).

Чтобы определить время для всей траектории QQ_1Q_2 , решим первое уравнение (3.17) на участке Q_1Q_2 , где $F(x) = 0$. Получим

$$y = C_4 e^{-\tau/T_1}.$$

Из начальных условий (3.27) следует

$$C_4 = y_1 e^{-\tau_1/T_1},$$

а в точке Q_2

$$y_2 = y_1 e^{-(\tau - \tau_1)/T_1},$$

откуда

$$\tau = \tau_1 + T_1 \ln \frac{y_1}{y_2},$$

или, согласно (3.29),

$$\tau = \tau_1 + T_1 \ln \left(1 + \frac{b_1 + b_2}{T_1 |y_2|} \right). \quad (3.31)$$

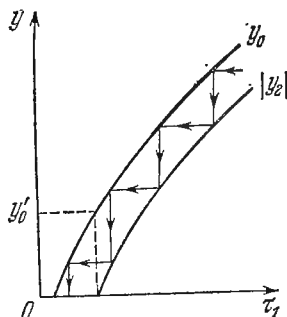


Рис. 3.18.

Зная из диаграммы (рис. 3.18) значения y_2 и τ_1 для каждого шага точечного преобразования, можем по формуле (3.31) подсчитать и время τ для этого шага.

Так определяется переходный процесс, когда точка Q_2 находится на линии Π_2 . Предельное (нижнее) положение исходной точки Q_0 , при котором это справедливо, найдется из диаграммы (рис. 3.18) при $|y_2| = 0$, как показано штриховой линией. Это будет значение y_0 . Следовательно, при ординате $y_0 < y_0$ исходной точки Q выражение (3.30) надо заменить другим. Здесь последующая точка Q_2 (рис. 3.17) определяется абсциссой x_2 . Поскольку в точке Q_2 имеем $y = 0$, то из (3.23) и (3.28) находим

$$x_2 = T_1 y_1 + b_1. \quad (3.32)$$

Следовательно, для каждой точки кривой $y_0(\tau_1)$, лежащей на диаграмме (рис. 3.18) ниже точки y_0 берем на оси абсцисс значение τ_1 . Для него по формуле (3.26) вычисляем y_1 , а затем x_2 (3.32). Если при этом окажется $|x_2| < b_1$, то процесс заканчивается равновесным состоянием системы внутри зоны нечувствительности релейной характеристики.

§ 4.1. Исходные положения
метода гармонической линеаризации

В предыдущих главах исследовались переходные процессы и автоколебания в нелинейных системах второго порядка. Этот материал весьма важен для получения наглядного представления о некоторых особенностях поведения нелинейных систем по сравнению с линейными. Однако большинство реальных систем автоматического управления и регулирования описывается уравнениями более высокого порядка. В связи с этим в данной и в следующих главах будут рассмотрены методы исследования нелинейных систем выше второго порядка.

Наиболее распространенным на практике для этих целей является *метод гармонической линеаризации (метод гармонического баланса)*. Основу этого приближенного метода составляют следующие положения.

Пусть имеется нелинейное звено с характеристикой

$$y = F(x) \quad (4.1)$$

любого из видов, указанных в § 1.1 (например, на рис. 1.1—1.5). Подадим на вход этого звена гармонический сигнал $x = a \sin \omega t$. На выходе получим $y = F(a \sin \omega t)$. На рис. 4.1 дан пример графического представления функции $F(a \sin \omega t)$ (рис. 4.1, б) для заданной нелинейной характеристики $F(x)$ (рис. 4.1, а).

Этот периодический выходной сигнал нелинейного звена можно разложить в ряд Фурье

$$y = F(a \sin \omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (4.2)$$

где

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \sin \omega t) dt, \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \sin \omega t) \cos n\omega t \, dt, \\ B_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \sin \omega t) \sin n\omega t \, dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Будем рассматривать нелинейную автоматическую систему любой сложности по структуре, но с одной нелинейностью $y = F(x)$. Тогда, выделив эту нелинейность

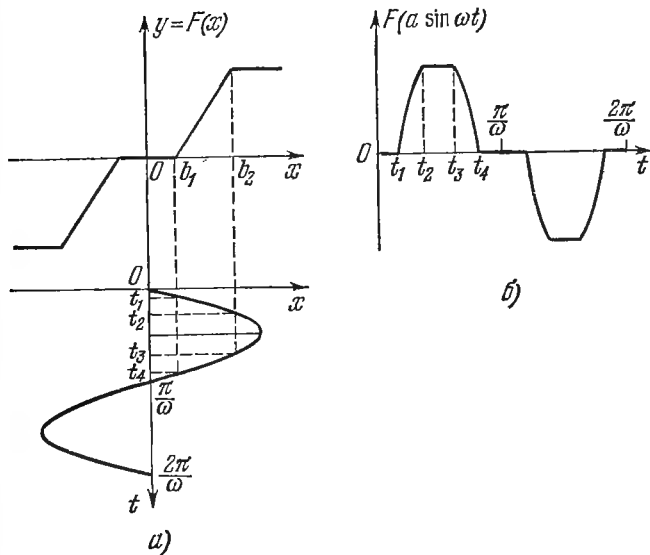
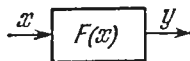


Рис. 4.1.

в отдельное звено, можно всю остальную часть системы, какую бы сложную структуру она ни имела, объединить в единый блок — линейную часть (рис. 4.2). Передаточную функцию линейной части обозначим

$$W_n(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} \quad (4.5)$$

и будем считать, что степень многочлена $R(s)$ в числителе меньше, чем степень многочлена $Q(s)$ в знаменателе. Тогда амплитудная частотная характеристика линейной части $W_n(j\Omega)$ (рис. 4.3) будет стремиться к нулю при $\Omega \rightarrow \infty$. Начало этой частотной характеристики может

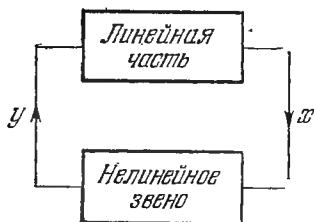


Рис. 4.2.

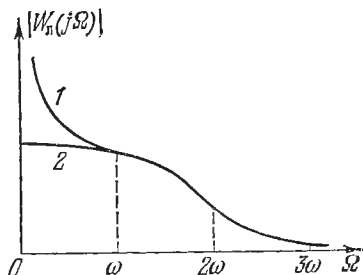


Рис. 4.3.

иметь два варианта (1, 2, рис. 4.3) в зависимости от того, имеется или нет нулевой полюс в передаточной функции (4.5).

Допустим, что в данной замкнутой системе возможны собственные периодические колебания (автоколебания). Отметим на оси абсцисс (рис. 4.3) частоту первой гармоники этих колебаний ω и высшие гармоники 2ω , 3ω , ... Предположим, что наша система обладает тем свойством, что величина амплитудной характеристики на частотах высших гармоник значительно меньше, чем для первой:

$$|W_n(jn\omega)| \ll |W_n(j\omega)|, \quad n = 2, 3, \dots$$

Это свойство называется *свойством фильтра* линейной части системы. При наличии свойства фильтра линейная часть системы (рис. 4.2) будет хорошо пропускать первую гармонику нелинейных колебаний y и ослаблять все высшие гармоники. Поэтому переменная x на входе нелинейного звена окажется близкой к синусоиде:

$$x \approx a \sin \omega t. \quad (4.6)$$

Это обстоятельство усиливается еще тем фактом, что, как правило, амплитуды высших гармоник (4.4) переменной y хотя и не малы, но все же меньше, чем первой.

При *несимметричных* колебаниях появится еще постоянная составляющая x^0 :

$$x \approx x^0 + a \sin \omega t. \quad (4.7)$$

Итак, базируясь на свойстве фильтра линейной части системы, будем считать, что собственные периодические колебания замкнутой нелинейной системы на входе нелинейного звена x в первом приближении можно полагать синусоидальными (4.6) или (4.7). Выходную же величину y нелинейного звена, содержащую в себе заметные высшие гармоники, надо определять при этом либо графически, как на рис. 4.1, либо аналитически — по формуле (4.2). В итоге вся задача сводится к определению двух неизвестных: частоты ω и амплитуды a первой гармоники колебаний переменной x в случае *симметричных* колебаний (4.6). В случае же *несимметричных* колебаний (4.7) речь будет идти о трех неизвестных: a , ω и постоянной составляющей x^0 .

Для решения этой задачи необходимо исследовать только прохождение первой гармоники по всей замкнутой цепи, не учитывая пока высших гармоник переменной y , ибо в первом приближении считается, что они не проходят на выход x линейной части системы. Запишем выражение первой гармоники переменной y согласно (4.2):

$$y = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad (4.8)$$

отбросив высшие гармоники не потому, что они малы, а потому что они не нужны для определения первого приближения x в виде (4.7). (При необходимости можно будет учесть и влияние высших гармоник [22].)

Симметричные колебания. При этом в (4.8) $A_0 = 0$. Обозначим

$$\frac{B_1}{a} = q(a), \quad \frac{A_1}{a} = q'(a). \quad (4.9)$$

Тогда (4.8) запишется в виде

$$y = q(a)a \sin \omega t + q'(a)a \cos \omega t.$$

Но, заметив, что

$$a \sin \omega t = x, \quad a \cos \omega t = \frac{px}{\omega}, \quad \left(p = \frac{d}{dt}\right),$$

получим

$$y = F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x, \quad (4.10)$$

где, обозначив $\psi = \omega t$, согласно (4.9) и (4.4), имеем

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Представление (4.10) называется *гармонической линеаризацией нелинейности*, а величины $q(a)$ и $q'(a)$ — *коэффициентами гармонической линеаризации*.

Правая часть выражения (4.10) линейна при $a = \text{const}$, т. е. только для данного конкретного периодического решения. Но в целом она сохраняет нелинейные свойства, так как коэффициенты данного периодического решения зависят от искомого решения (от величины амплитуды колебаний переменной x). Эта особенность гармонической линеаризации и позволит нам в дальнейшем исследовать с ее помощью основные свойства и особенности процессов в нелинейных автоматических системах.

Гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейного звена имеет вид

$$W_n(a, s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} s. \quad (4.12)$$

Амплитудно-фазовая характеристика нелинейного звена в результате подстановки $s = j\omega$ выражается в форме

$$W_n(a) = q(a) + jq'(a). \quad (4.13)$$

Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика нелинейности $F(x)$ зависит только от амплитуды и не зависит от частоты, в противоположность характеристикам линейных звеньев.

Для *динамических нелинейностей*, где имеется явная зависимость от скорости, т. е. для нелинейностей вида $F(x, \dot{x})$, коэффициенты q , q' , а значит, и характеристика $W_n(j\omega)$ будут зависеть от амплитуды a и от частоты ω . Существуют и такие нелинейности, для которых q , q' и

W_n не зависят от амплитуды, а зависят только от частоты ω . Однако характер этой зависимости принципиально иной, чем для линейных звеньев. Такие нелинейные звенья называются *псевдолинейными* (см. § 7.3). В данной книге мы ограничимся только системами с нелинейностями типа $F(x)$. Об исследовании систем с более сложными нелинейностями см. [22].

Несимметричные колебания. При этом, согласно (4.7), будем иметь

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = a \sin \omega t. \quad (4.14)$$

Поэтому в результате гармонической линеаризации вместо (4.10) — (4.11), согласно (4.8), (4.3) и (4.4), получим

$$y = F(x) = F^0(x^0, a) + \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] x^*, \quad (4.15)$$

где

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) d\psi, \quad (4.16)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Как видно из (4.15), выходная величина нелинейности y содержит постоянную составляющую F^0 и периодическую составляющую, выраженную через $x^* = a \sin \omega t$. Однако каждая из них зависит не только от соответствующей составляющей входа (т. е. F^0 зависит не только от x^0 и периодическая — не только от a), но от обеих сразу. Это является существенным отличием нелинейного звена от линейного и обуславливает неприменимость здесь принципа суперпозиции, который составлял важное свойство линейных систем.

§ 4.2. Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации

Проиллюстрируем вычисление коэффициентов гармонической линеаризации на нескольких примерах: сначала для симметричных колебаний, а затем для несимметричных. Предварительно заметим, что если нечетно-симметричная нелинейность $F(x)$ однозначна, то, согласно (4.11) и (4.10), получаем

$$q' = 0, \quad F(x) = q(a)x, \quad (4.18)$$

причем при вычислении q (4.11) можно ограничиться интегрированием на четверти периода, учетверив результат, а именно

$$q = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi. \quad (4.19)$$

Для петлевой нелинейности $F(x)$ (нечетно-симметричной) будет иметь место полное выражение (4.10)

$$F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x, \quad (4.20)$$

причем можно пользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

т. е. удвоением результата интегрирования на полупериоде.

Пример 1. Исследуем кубическую нелинейность (рис. 4.4, а):

$$F(x) = k_1 x + k_3 x^3,$$

$$q' = 0, \quad q = k_1 + \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} k_3 a^3 \sin^3 \psi \sin \psi d\psi = k_1 + \frac{3}{4} k_3 a^2. \quad (4.22)$$

Зависимость $q(a)$ показана на рис. 4.4, б. Из рис. 4.4, а видно, что при заданной амплитуде a прямая $q(a)x$ осредняет криволинейную зависимость $F(x)$ на данном

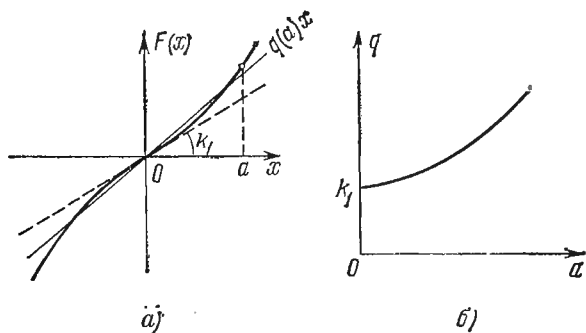


Рис. 4.4.

участке $-a \leq x \leq a$. Естественно, что крутизна $q(a)$ наклона этой осредняющей прямой $q(a)x$ увеличивается с увеличением амплитуды a (для кубической характеристики это увеличение происходит по квадратичному закону).

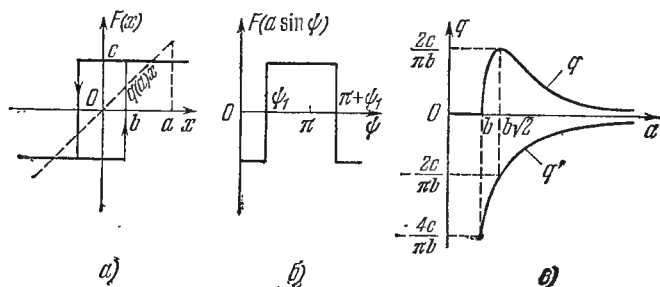


Рис. 4.5.

Пример 2. Исследуем петлевую релейную характеристику (рис. 4.5, а). На рис. 4.5, б представлена подынтегральная функция $F(a \sin \psi)$ для формул (4.21). Переключение реле имеет место при $|x| = b$. Поэтому в момент переключения величина ψ_1 определяется

выражением $\sin \psi_1 = b/a$. По формулам (4.21) получаем (для $a \geq b$)

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2}{\pi a} \left[\int_0^{\psi_1} (-c) \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi} c \sin \psi d\psi \right] = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \\ q' &= \frac{2}{\pi a} \left[\int_0^{\psi_1} (-c) \cos \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi} c \cos \psi d\psi \right] = -\frac{4cb}{\pi a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

На рис. 4.5, в изображены графики $q(a)$ и $q'(a)$. Первый из них показывает изменение крутизны наклона осредняющей прямой $q(a)x$ с изменением a (см. рис. 4.5, а). Естественно, что $q(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, так как сигнал на выходе остается постоянным ($F(x) = c$) при любом неограниченном увеличении входного сигнала x . Из физических соображений ясно также, почему $q' < 0$. Это коэффициент при производной в формуле (4.20). Положительный знак давал бы опережение сигнала на выходе, в то время как гистерезисная петля дает запаздывание. Поэтому естественно, что $q' < 0$. Абсолютное значение q' уменьшается с увеличением амплитуды a , так как ясно, что петля будет занимать тем меньшую часть «рабочего участка» характеристики $F(x)$, чем больше амплитуда колебаний переменной x .

Амплитудно-фазовая характеристика такой нелинейности (рис. 4.5, а), согласно (4.13), представляется в виде

$$W_n(a) = q(a) + jq'(a),$$

причем амплитуда и фаза первой гармоники на выходе нелинейности имеют соответственно вид

$$A = |W_n(a)| = \sqrt{q^2(a) + [q'(a)]^2}, \quad \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{|q'(a)|}{q(a)},$$

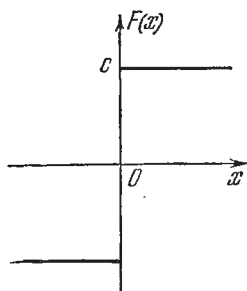
где q и q' определены выше (рис. 4.5, в). Следовательно, гармоническая линеаризация переводит нелинейное координатное запаздывание (гистерезисную петлю) в эквивалентное запаздывание по фазе, характерное для линейных систем, но с существенным отличием — зависи-

мостью фазового сдвига от амплитуды входных колебаний, чего нет в линейных системах.

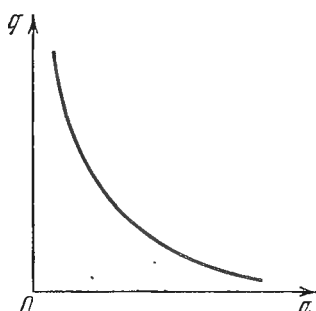
Пример 3. Исследуем однозначные релейные характеристики (рис. 4.6, а, в). Аналогично предыдущему получаем соответственно

$$q = \frac{4c}{\pi a}, \quad q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (q' = 0), \quad (4.24)$$

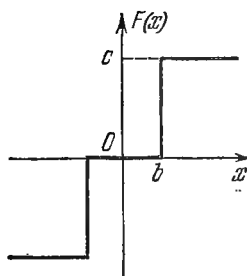
что изображено на рис. 4.6, б, г.



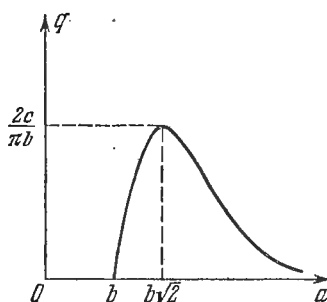
а)



б)



в)



г)

Рис. 4.6.

Пример 4. Исследуем характеристику с зоной нечувствительности, линейным участком и насыщением (рис. 4.7, а). Здесь $q' = 0$, а коэффициент $q(a)$ имеет

два варианта значений в соответствии с рис. 4.7, б, где для них построена $F(a \sin \psi)$:

1) при $b_1 \leq a \leq b_2$, согласно (4.19), имеем

$$q = \frac{4}{\pi a} \int_{\psi_1}^{\pi/2} k(a \sin \psi - b_1) \sin \psi d\psi,$$

что с учетом соотношения $a \sin \psi_1 = b_1$ дает

$$q = k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} \right); \quad (4.25)$$

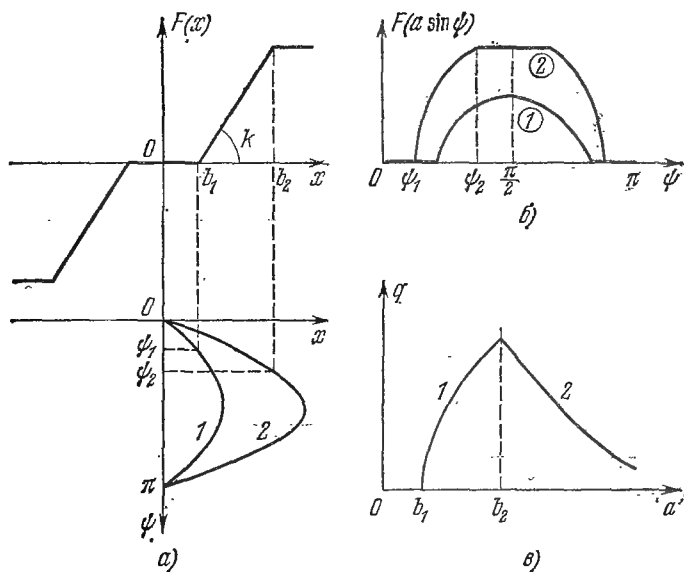


Рис. 4.7.

2) при $a \geq b_2$

$$q = \frac{4}{\pi a} \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} k(a \sin \psi - b_1) \sin \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi/2} c \sin \psi d\psi \right],$$

$$c = k(b_2 - b_1),$$

что с учетом соотношения $a \sin \psi_2 = b_2$ дает

$$q = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{a} - \arcsin \frac{b_1}{a} + \right. \\ \left. + \frac{b_2}{a} \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{a^2}} - \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} \right). \quad (4.26)$$

Графически результат представлен на рис. 4.7, в.

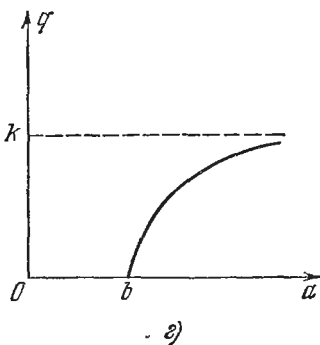
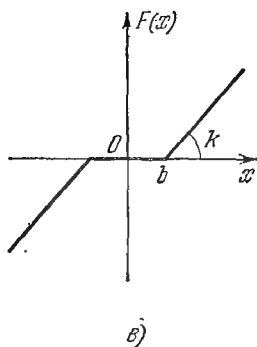
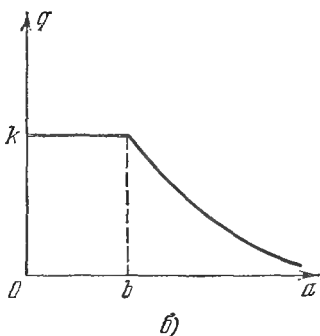
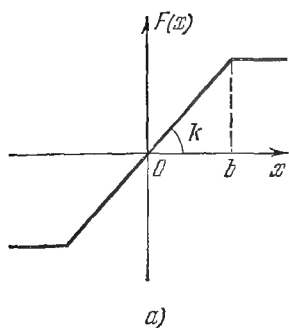


Рис. 4.8.

Пример 5. Как частные случаи, соответствующие коэффициенты $q(a)$ для двух характеристик (рис. 4.8, а, в) равны

$$q = k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), \quad a \geq b. \quad (4.27)$$

$$q = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), \quad a \geq b, \quad (4.28)$$

что изображено графически на рис. 4.8, б, г. При этом для характеристики с насыщением (рис. 4.8, а) имеем $q = k$ при $0 \leq a \leq b$.

Покажем теперь примеры вычисления коэффициентов гармонической линеаризации для несимметричных колебаний при тех же нелинейностях.

Пример 6. Для случая кубической нелинейности $F(x) = kx^3$ по формуле (4.16) имеем

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(x^0 + a \sin \psi)^3 d\psi = k \left[(x^0)^3 + \frac{3}{2} x^0 a^2 \right], \quad (4.29)$$

а по формулам (4.17)

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} k(x^0 + a \sin \psi)^3 \sin \psi d\psi = 3k \left[(x^0)^2 + \frac{a^2}{4} \right],$$

$$q' = 0. \quad (4.30)$$

Пример 7. Для петлевой релейной характеристики (рис. 4.5, а) по тем же формулам имеем

$$F^0 = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b+x^0}{a} - \arcsin \frac{b-x^0}{a} \right), \quad (4.31)$$

$$q = \frac{2c}{\pi a} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b+x^0}{a} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b-x^0}{a} \right)^2} \right],$$

$$q' = -\frac{4cb}{\pi a^2}. \quad (4.32)$$

Пример 8. Для характеристики с зоной нечувствительности (рис. 4.9) будут иметь место те же выражения F^0 и q . Графики их представлены на рис. 4.9, а, б. При этом $q' = 0$. Для идеальной же релейной характеристики (рис. 4.10) получаем

$$F^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a}, \quad q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a} \right)^2}, \quad q' = 0, \quad (4.33)$$

что изображено на рис. 4.10, а и б.

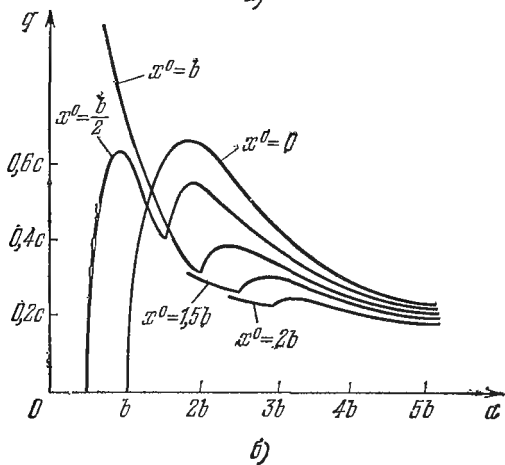
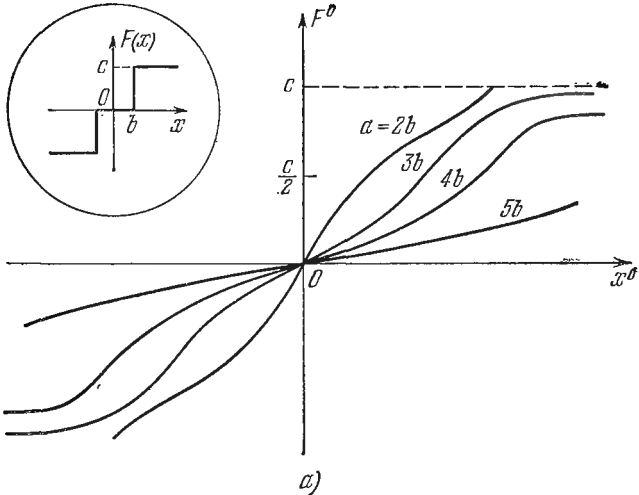


Рис. 4.9.

Пример 9. Для характеристики с линейным участком и насыщением (рис. 4.11, а) при $a \geq b + |x^0|$ имеем

$$F^0 = \frac{k}{\pi} \left\{ a \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b+x^0}{a} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{b-x^0}{a} \right)^2} \right] + \right. \\ \left. + (b+x^0) \arcsin \frac{b+x^0}{a} - (b-x^0) \arcsin \frac{b-x^0}{a} \right\}, \quad (4.34)$$

$$q = \frac{k}{\pi} \left[\arcsin \frac{b-x^0}{a} + \arcsin \frac{b+x^0}{a} + \right. \\ \left. + \frac{b-x^0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b-x^0}{a} \right)^2} + \frac{b+x^0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b+x^0}{a} \right)^2} \right]. \quad (4.35)$$

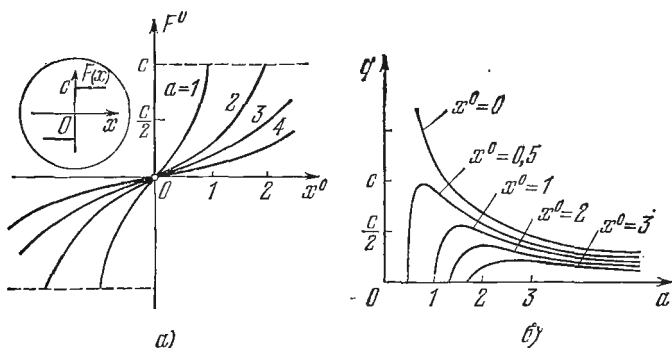


Рис. 4.10.

Эти зависимости представлены в виде графиков на рис. 4.11, б, в.

Пример 10. Для несимметричной характеристики $F(x) = c \left[\left(\frac{x}{b} + 1 \right)^3 - 1 \right]$ (рис. 4.12, а) по формуле (4.16) находим

$$F^0 = c \left\{ \left(\frac{x^0}{b} + 1 \right) \left[\left(\frac{x^0}{b} + 1 \right)^2 + \frac{3a^2}{2b^2} \right] - 1 \right\},$$

а по формулам (4.17)

$$q' = 0 \quad \text{и} \quad q = 3 \frac{c}{b} \left[\frac{a^2}{4b^2} + \left(\frac{x^0}{b} + 1 \right)^2 \right].$$

Результаты изображены графически на рис. 4.12, б и в.

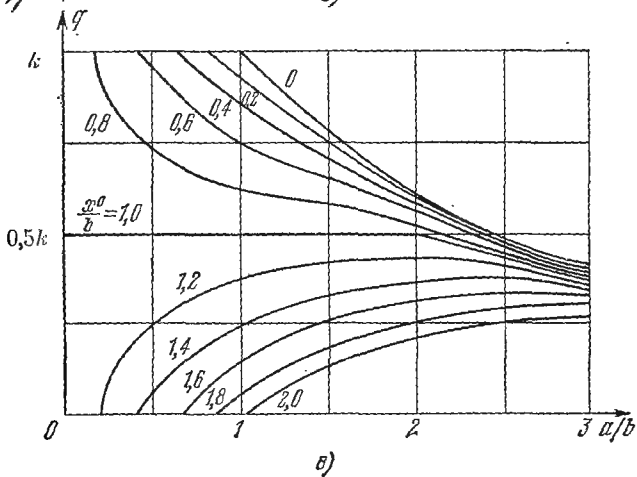
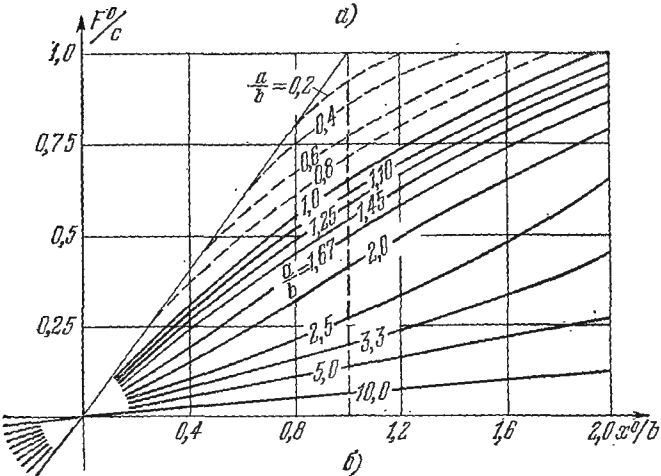
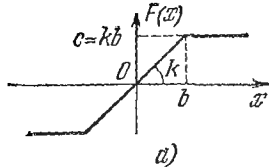


Рис. 4.11.

Полученные в этих примерах выражения и графики коэффициентов гармонической линеаризации будут использованы ниже при решении задач по исследованию

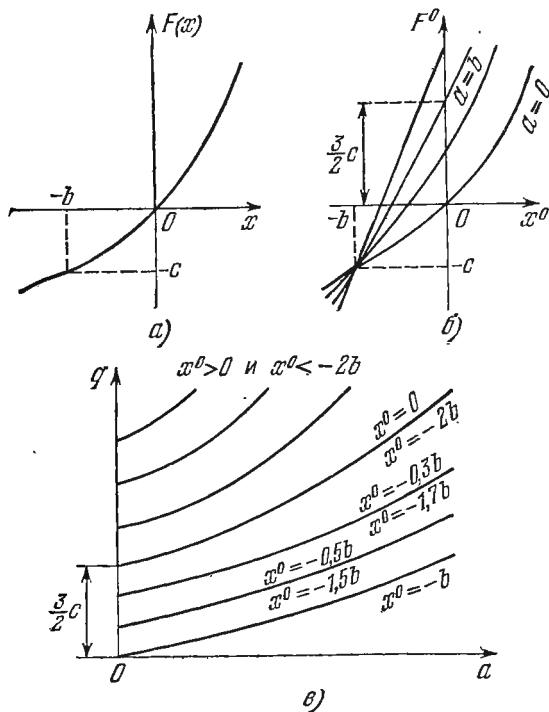


Рис. 4.12.

автоколебаний, вынужденных колебаний и процессов управления.

§ 4.3. Алгебраический способ определения симметричных автоколебаний и устойчивости

Рассмотрим определение симметричных автоколебаний алгебраическим способом на основе гармонической линеаризации нелинейности. Пусть система (рис. 4.2) с одной нелинейностью $F(x)$ имеет передаточную функцию

линейной части

$$W_{\pi}(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

обладающую свойством фильтра (см. § 4.1). Уравнения линейной части системы и нелинейного звена:

$$Q(p)x = -R(p)y, \quad y = F(x), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Уравнение замкнутой системы примет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = 0. \quad (4.36)$$

Решение ищется приближенно в форме

$$x = a \sin \omega t \quad (4.37)$$

с двумя неизвестными a и ω . После гармонической линеаризации

$$F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x$$

уравнение (4.36) приобретает вид

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\} x = 0. \quad (4.38)$$

Поскольку в искомом решении (4.37) $a = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$, то гармонически линеаризованное уравнение замкнутой системы (4.38) можно рассматривать как обыкновенное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Специфика его состоит лишь в том, что имеются неизвестные постоянные коэффициенты, зависящие от искомого решения, что и позволит нам получить решение со специфическими свойствами, присущими нелинейной системе.

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$Q(\lambda) + R(\lambda) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \lambda \right] = 0. \quad (4.39)$$

Периодическое решение (4.37) уравнения (4.38) соответствует паре чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ характеристического уравнения (4.39). Поэтому для отыскания этого решения подставим в него $\lambda = j\omega$. Получим

$$Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a) + jq'(a)] = 0.$$

Выделим в этом выражении вещественную и мнимую части в виде

$$X(a, \omega) + jY(a, \omega) = 0.$$

В результате получим два алгебраических уравнения

$$X(a, \omega) = 0, \quad Y(a, \omega) = 0, \quad (4.40)$$

из которых и определяются искомые амплитуда a и частота ω периодического решения (4.37).

Заметим, что решение задачи упрощается в случае однозначной нелинейности $F(x)$: вместо (4.39) здесь имеем

$$Q(\lambda) + R(\lambda)q(a) = 0.$$

При подстановке $\lambda = j\omega$ выделим вещественные и мнимые части многочленов Q и R в виде

$$Q(j\omega) = X_Q(\omega) + jY_Q(\omega), \quad R(j\omega) = X_R(\omega) + jY_R(\omega).$$

Тогда вместо (4.40) получим

$$X_Q(\omega) + X_R(\omega)q(a) = 0, \quad Y_Q(\omega) + Y_R(\omega)q(a) = 0.$$

Эти два уравнения можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} q(a) &= -\frac{X_Q(\omega)}{X_R(\omega)}, \\ X_Q(\omega)Y_R(\omega) - Y_Q(\omega)X_R(\omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.40a)$$

Сначала из второго уравнения определяется частота ω периодического решения, а затем из первого уравнения определяется амплитуда a . Видно, что частота зависит от параметров линейной части и не зависит от формы *однозначной* нелинейности. В случае же *петлевой* нелинейности это свойство нарушается и будет иметь место общий случай уравнений (4.40).

Определив таким образом периодическое решение, надо исследовать его устойчивость. Если оно устойчиво, то это означает автоколебательный процесс. Неустойчивое периодическое решение имеет другой физический смысл (см. в § 1.4 о неустойчивом предельном цикле).

Классический подход к исследованию устойчивости периодического решения состоит в следующем. Рассмотрим

рим отклонение Δx от исследуемого периодического решения:

$$x = x^* + \Delta x, \quad x^* = a \sin \omega t.$$

С учетом этого уравнение динамики системы (4.36) примет вид

$$Q(p)(x^* + \Delta x) + R(p)F(x^* + \Delta x) = 0,$$

или

$$Q(p)(x^* + \Delta x) + R(p)\left[F(x^*) + \left(\frac{dF}{dx}\right)^* \Delta x + \dots\right] = 0.$$

Но согласно (4.36)

$$Q(p)x^* + R(p)F(x^*) = 0,$$

поэтому, отбросив слагаемые с производными высшего порядка, получаем уравнение в малых отклонениях

$$Q(p)\Delta x + R(p)\left(\frac{dF}{dx}\right)^* \Delta x = 0,$$

устойчивость которого надо исследовать.

Это линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. В самом деле, если, например, $F(x) = kx^3$, то коэффициент

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)^* = (3kx^2)^* = 3ka^2 \sin^2 \omega t.$$

Однако исследовать точными методами устойчивость уравнения высокого порядка с периодическими коэффициентами весьма сложно. Поэтому обратимся к приближенному способу.

Дадим малые начальные отклонения Δa амплитуды и $\Delta \omega$ частоты от их значений a и ω в периодическом решении. Тогда

$$x = (a + \Delta a)e^{-\frac{1}{2}\xi t} \sin(\omega + \Delta \omega)t. \quad (4.41)$$

Этим выражением описывается колебательный переходный процесс вблизи периодического (4.37). Для устойчивости найденного периодического процесса необходимо, очевидно, чтобы в выражении (4.41) величины Δa и ξ имели одинаковые знаки. В этом случае при положительном Δa амплитуда уменьшается, а при отрицательном Δa — увеличивается, стремясь к значению a .

Чтобы на этом основании вывести критерий устойчивости, используем символическую запись выражений (4.37) и (4.41); соответственно имеем

$$x = ae^{j\omega t}, \quad x = (a + \Delta a) e^{j(\omega + \Delta\omega + j\xi)t}.$$

Первое решение определялось уравнением

$$X(a, \omega) + jY(a, \omega) = 0.$$

По аналогии с этим для нахождения второго решения запишем уравнение

$$X(a + \Delta a, \omega + \Delta\omega + j\xi) + jY(a + \Delta a, \omega + \Delta\omega + j\xi) = 0.$$

Разложив это выражение в ряд Тейлора и используя предыдущее выражение, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \Delta a + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* (\Delta\omega + j\xi) + j \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* \Delta a + \\ + j \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* (\Delta\omega + j\xi) = 0, \end{aligned}$$

где звездочка означает подставку значений a и ω , соответствующих исследуемому периодическому решению.

Если в этом выражении выделить вещественную и мнимую части, а из полученных в результате двух уравнений исключить величину $\Delta\omega$, то найдем

$$\xi = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^*}{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2} \Delta a.$$

Для устойчивости периодического решения, как уже говорилось, требуется одинаковость знаков ξ и Δa . Следовательно, требуется, чтобы

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* > 0. \quad (4.42)$$

В дополнение к этому нужно потребовать, чтобы в характеристическом уравнении гармонически линеаризованной системы (4.39) все остальные корни (кроме использованной нами пары чисто мнимых) имели отрицатель-

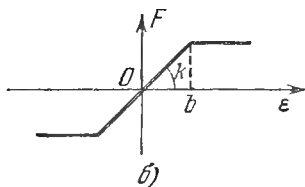
ные вещественные части, т. е. чтобы многочлен

$$\frac{Q(\lambda) + R(\lambda) \left(q + \frac{q'}{\omega} \lambda \right)}{\lambda^2 + \omega^2} \quad (4.43)$$

удовлетворял критерию Гурвица (или Михайлова). В случае систем третьего и четвертого порядка для этого достаточно потребовать лишь положительности коэффициентов уравнения (4.39).



а)



б)

Рис. 4.13.

Итак, критерием устойчивости периодического решения является неравенство (4.42) с добавлением (4.43), если исследуется система выше четвертого порядка.

Приведем примеры определения автоколебаний изложенным методом.

Пример 1. Следящая система (рис. 4.13) описывается уравнениями

$$\varepsilon = \alpha - \beta, \quad u = F(\varepsilon),$$

$$(T_1 p + 1)i = k_1 u, \quad (T_2 p + 1)p\beta = k_2 i,$$

где $F(\varepsilon)$ — нелинейная характеристика усилителя с насыщением.

Уравнение линейной части при $\alpha = 0$ будет

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p\varepsilon = -k_n u, \quad k_n = k_1 k_2.$$

Гармоническая линеаризация нелинейности, согласно (4.28), дает

$$q = \begin{cases} k & \text{при } a \leq b, \\ \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) & \text{при } a \geq b. \end{cases}$$

Гармонически линеаризованное уравнение замкнутой системы имеет вид

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_{\text{л}} q(a)] \varepsilon = 0, \quad (4.44)$$

а характеристическое уравнение —

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + k_{\text{л}} q(a) = 0.$$

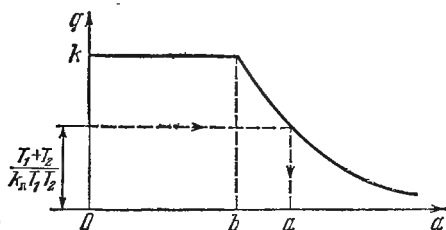


Рис. 4.14.

После подстановки $\lambda = j\omega$ получаем два уравнения

$$\left. \begin{aligned} X(a, \omega) &= 0, & k_{\text{л}} q(a) - (T_1 + T_2) \omega^2 &= 0, \\ Y(a, \omega) &= 0, & \omega - T_1 T_2 \omega^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Здесь подтверждается свойство (4.40а). Из второго уравнения определяем частоту периодического решения

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad (4.46)$$

а из первого при этом получаем

$$q(a) = \frac{1}{k_{\text{л}}} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right). \quad (4.47)$$

Используя готовый график $q(a)$ (рис. 4.8, б), находим амплитуду периодического решения a , как показано на рис. 4.14.

Для определения устойчивости решения, согласно критерию (4.42), надо найти производные выражений (4.45):

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right) = k_{\text{л}} \left(\frac{dq}{da}\right)^* < 0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* = -2(T_1 + T_2)\omega^* < 0;$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* = 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = (1 - 3T_1T_2\omega^2)^* = -2 < 0.$$

Критерий (4.42) удовлетворяется. Следовательно, имеют место автоколебания.

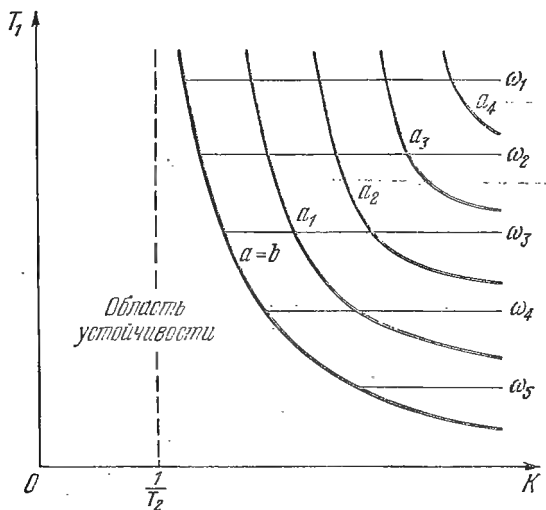


Рис. 4.15.

Если учесть, что $q(a) \leq k$ (рис. 4.14), из уравнения (4.47) вытекают условия существования автоколебаний

$$\frac{1}{k_{\text{л}}} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) < k,$$

или

$$K > \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}; \quad (4.48)$$

$K = k_{\text{л}}k$ — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи данной системы в линейном плане. Легко видеть, что (4.48) представляет собой условие неустойчивости

этой системы как линейной согласно критерию Гурвица. Граница устойчивости

$$K_{\text{гр}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

является в то же время границей области автоколебаний. Эта граница нанесена на плоскости параметров (K, T_1) (рис. 4.15). Левее этой границы имеет место область

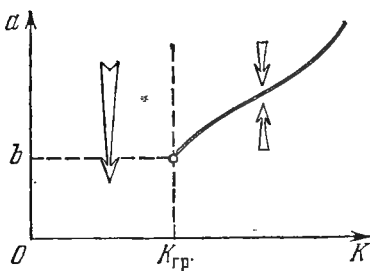


Рис. 4.16.

устойчивости равновесного состояния системы, а правее — область автоколебаний, где изображены, согласно (4.46) и (4.47), линии равных значений a и ω .

Зависимость амплитуды автоколебаний от коэффициента K изображена на рис. 4.16. Если величину a трактовать шире — как амплитуду коле-

баний в переходном процессе, то стрелками (рис. 4.16) можно показать направление изменения амплитуды в разных областях значений K . В линейной системе (без насыщения) при $K < K_{\text{гр}}$ было бы затухание, а при $K > K_{\text{гр}}$ — неограниченно расходящиеся колебания. В нелинейной системе (с насыщением) колебания при $K > K_{\text{гр}}$ расходятся не до бесконечности, а до определенной амплитуды. При больших же начальных отклонениях они даже затухают (рис. 4.16), так как имеется устойчивый автоколебательный режим.

Пример 2. Пусть теперь в той же следящей системе (рис. 4.13, а) усилитель имеет релейную характеристику (рис. 4.17, а). Уравнение замкнутой системы имеет вид (4.44), где, в отличие от прежнего случая,

$$q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad a \geq b.$$

Решения (4.46) и (4.47) сохраняют свой вид. Меняется только график $q(a)$. Подобно рис. 4.6, он показан здесь на рис. 4.17, б. Уравнение (4.47) имеет два решения a_1 и a_2 (рис. 4.17, б), причем в точках a_1 и a_2 имеем

соответственно $dq/da > 0$ и $dq/da < 0$. С учетом этого знаки производных в критерии устойчивости периодического решения (4.42) оказываются такими, что в точке a_1 критерий не выполняется (решение неустойчиво), а в точке a_2 — выполняется. В соответствии с этим решением (рис. 4.17, б) на рис. 4.18 изображена зависимость амплитуды автоколебаний (a_2) и амплитуды неустойчивого периодического решения (a_1) в зависимости от ко-

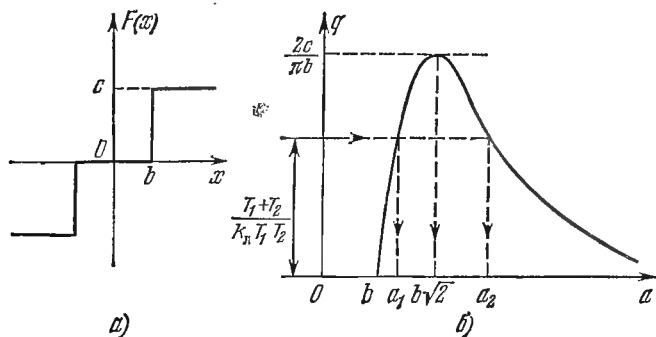


Рис. 4.17.

эффициента усиления линейной части системы $k_{\text{л}}$. Стрелками обозначены направления изменения амплитуды колебаний в переходных процессах. Величина $k_{\text{гр}}$ (рис. 4.18) соответствует точке максимума на рис. 4.17, б, т. е.

$$k_{\text{гр}} = \frac{\pi b}{2c} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right).$$

При $k_{\text{л}} < k_{\text{гр}}$ равновесное состояние устойчиво при любых начальных условиях. Если $k_{\text{л}} > k_{\text{гр}}$, то равновесное состояние устойчиво лишь при малых начальных отклонениях (ниже линии a_1), а при больших начальных отклонениях (выше линии a_1) устанавливаются автоколебания с амплитудой a_2 .

Здесь имеет место пример присущей нелинейным системам существенной зависимости характера поведения системы от порядка величин начальных условий. Линии a_1 и a_2 (рис. 4.18) разделяют области притяжения различных установившихся режимов по начальным условиям.

На рис. 4.19 показан результат решения той же задачи при идеальном реле, а на рис. 4.20 — при петлевой характеристике реле. Последний случай отличается тем,

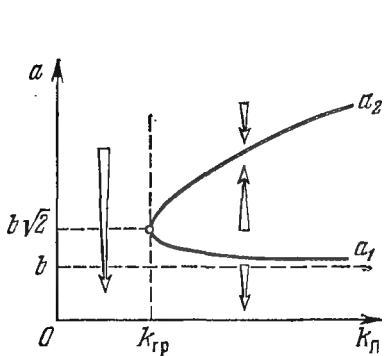


Рис. 4.18.

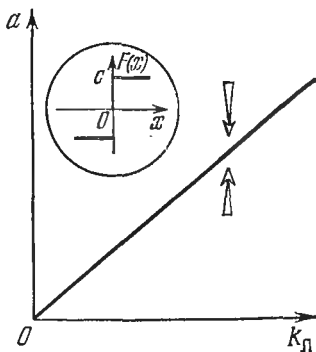


Рис. 4.19.

что характеристическое уравнение вместо прежнего получает вид

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + k_{\text{л}} \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \lambda \right] = 0,$$

где, согласно (4.23),

$$q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad q' = -\frac{4cb}{\pi a^2}.$$

После подстановки $\lambda = j\omega$ получаем

$$\left. \begin{aligned} X &= k_{\text{л}} q(a) - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0, \\ Y &= k_{\text{л}} q'(a) + \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Исключив $k_{\text{л}}$ из этих уравнений, с подстановкой выражения $q'(a)$ получим

$$\frac{\pi a^2}{4cb} q(a) = \frac{(T_1 + T_2) \omega}{1 - T_1 T_2 \omega^2},$$

откуда определяется $\omega(a)$ при заданных T_1 и T_2 . После этого из второго уравнения (4.49) имеем

$$k_{\text{л}} = \frac{\pi a^2 \omega}{4cb} (1 - T_1 T_2 \omega^2).$$

Это позволяет с учетом полученной выше $\omega(a)$ построить зависимости $a(k_n)$ и $\omega(k_n)$, изображенные на рис. 4.20. Это решение характеризуется наличием зависимости $\omega(k_n)$ (рис. 4.20, б) в отличие от всех предыдущих примеров, где частота ω (4.46) не зависела от K и k_n .

Заметим, что в отличие от случаев, показанных на рис. 4.19 и 4.20, с мягким возбуждением автоколебаний

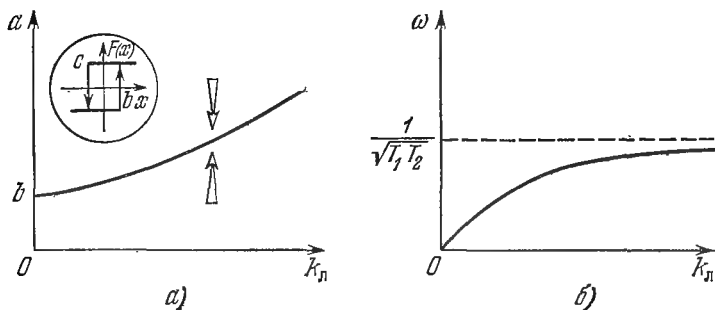


Рис. 4.20.

при любых параметрах системы, на рис. 4.18 для релейной системы с зоной нечувствительности имеем область устойчивости равновесного состояния ($0 < k < k_{rp}$) и жесткое возбуждение автоколебаний при $k > k_{rp}$ (требующее заброса начального состояния системы за линию a_1 , т. е. $a_0 > a_1$).

§ 4.4. Частотный способ определения симметричных автоколебаний

Базируясь на свойстве фильтра линейной части системы (§ 4.1), ищем периодическое решение нелинейной системы (рис. 4.21) на входе нелинейного элемента приближенно в виде

$$x = a \sin \omega t \quad (4.50)$$

с неизвестными a и ω . Задана форма нелинейности $y = F(x)$ и передаточная функция линейной части

$$W_n(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}.$$

Производится гармоническая линеаризация нелинейности

$$F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x,$$

что приводит к передаточной функции

$$W_H(a, s) = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} s.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи системы получает вид

$$W(j\omega) = W_L(j\omega) W_H(a) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} [q(a) + jq'(a)].$$

Периодическое решение линеаризованной системы (4.50) получается при наличии в характеристическом уравнении замкнутой системы пары чисто мнимых корней.

А это по критерию Найквиста соответствует прохождению $W(j\omega)$ через точку -1 . Следовательно, периодическое решение (4.50) определяется равенством

$$W_L(j\omega) W_H(a) = -1,$$

или

$$W_L(j\omega) = -\frac{1}{W_H(a)}, \quad (4.51)$$

где

$$W_H(a) = q(a) + jq'(a). \quad (4.52)$$

Уравнение (4.51) определяет искомые амплитуду a и частоту ω периодического решения. Это уравнение решается графически следующим образом. На комплексной плоскости (U, V) вычерчивается амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части $W_L(j\omega)$ (рис. 4.22), а также обратная амплитудно-фазовая характеристика нелинейности с обратным знаком $-1/W_H(a)$. Точка B их пересечения (рис. 4.22) и определяет величины a и ω , причем значение a отсчитывается по кривой $-1/W_H(a)$, а значение ω — по кривой $W_L(j\omega)$.

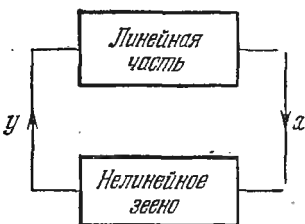


Рис. 4.21.

Вместо этого можно пользоваться двумя скалярными уравнениями, вытекающими из (4.51) и (4.52):

$$|W_{\text{л}}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{q^2(a) + [q'(a)]^2}}, \quad (4.53)$$

$$\arg W_{\text{л}}(j\omega) = -180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{q'(a)}{q(a)}, \quad (4.54)$$

которые также определяют две искомые величины a и ω .

Последними двумя уравнениями удобнее пользоваться в логарифмическом масштабе, привлекая логарифмические частотные характеристики линейной части. Тогда вместо (4.53) и (4.54) будем иметь следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Lm}_{\text{л}}(\omega) &= \\ &= -20 \lg \sqrt{q^2(a) + [q'(a)]^2} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{л}}(\omega) &= -180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{q'(a)}{q(a)}, \\ & \quad (4.56) \end{aligned}$$

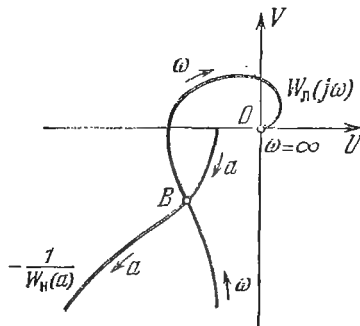


Рис. 4.22.

На рис. 4.23 слева изображены графики левых частей уравнений (4.55) и (4.56), а справа — правых частей этих уравнений. При этом по оси абсцисс слева частота ω откладывается, как обычно, в логарифмическом масштабе, а справа — амплитуда a в натуральном масштабе. Решением этих уравнений будут такие значения a и ω , чтобы при них одновременно соблюдались оба равенства: (4.55) и (4.56). Такое решение показано на рис. 4.23 тонкими линиями в виде прямоугольника.

Очевидно, что сразу угадать это решение не удастся. Поэтому делаются попытки, показанные штриховыми линиями. Последние точки этих пробных прямоугольников M и M_1 не попадают на фазовую характеристику нелинейности. Но если они расположены по обе стороны характеристики, как на рис. 4.23, то решение находится интерполяцией — путем проведения прямой MM_1 .

Нахождение периодического решения упрощается в случае однозначной нелинейности $F(x)$. Тогда $q' = 0$

и уравнения (4.55) и (4.56) принимают вид

$$Lm_{\pi}(\omega) = -20 \lg q(a), \quad \varphi_{\pi}(\omega) = -180^{\circ}. \quad (4.57)$$

Решение показано на рис. 4.24.

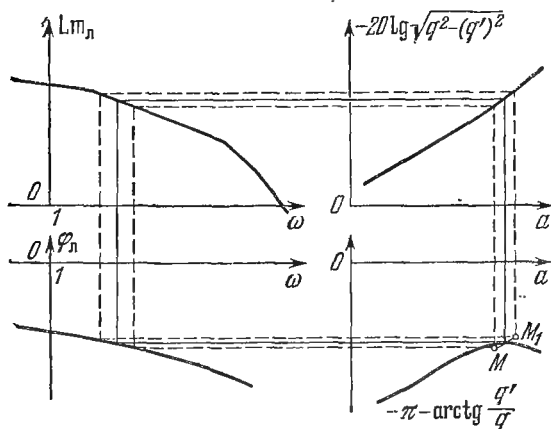


Рис. 4.23.

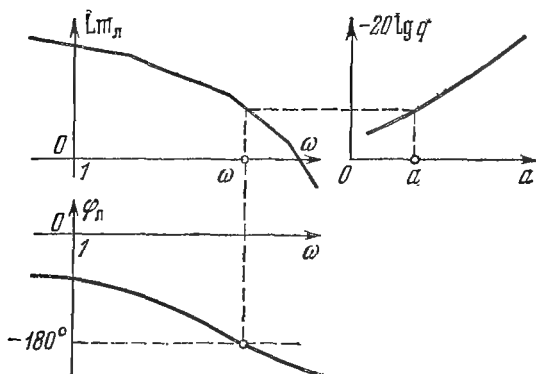


Рис. 4.24.

После определения периодического решения надо исследовать его устойчивость. Как уже говорилось, перио-

дическое решение имеет место в случае, когда амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой цепи

$$W(j\omega, a) = W_n(j\omega) W_a(a)$$

проходит через точку -1 . Дадим амплитуде отклонение Δa . Система будет возвращаться к периодическому решению, если при $\Delta a > 0$ колебания затухают, а при $\Delta a < 0$ — расходятся. Следовательно, при $\Delta a > 0$ характеристика $W(j\omega, a)$ должна деформироваться (рис. 4.25) так, чтобы при $\Delta a > 0$ критерий устойчивости Найквиста соблюдался, а при $\Delta a < 0$ — нарушался.

Итак требуется, чтобы на данной частоте ω было

$$|W_n(j\omega) W_a(a + \Delta a)| < 1$$

при $\Delta a > 0$, или

$$|W_n(j\omega)| < \left| \frac{1}{W_a(a + \Delta a)} \right|.$$

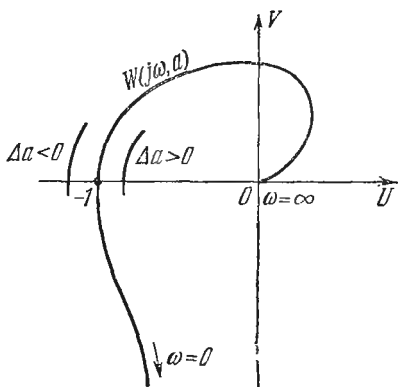


Рис. 4.25

Отсюда следует, что на рис. 4.22 положительный отсчет амплитуды a вдоль кривой $-1/W_n(a)$ должен быть направлен изнутри вовне через кривую $W_n(j\omega)$, как там и показано стрелкой. В противном случае периодическое решение неустойчиво.

Рассмотрим примеры.

Пусть в следящей системе (рис. 4.13, а) усилитель имеет релейную характеристику (рис. 4.17, а). На рис. 4.17, б для нее показан график коэффициента гармонической линеаризации $q(a)$, причем $q'(a) = 0$. Для определения периодического решения частотным способом, согласно рис. 4.22, надо исследовать выражение

$$-\frac{1}{W_n(a)} = -\frac{1}{q(a)}.$$

Из формулы (4.24) получаем для данной нелинейности

$$-\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{\pi a^2}{4c \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

График этой функции изображен на рис. 4.26.

Передаточная функция линейной части, согласно примеру 1 § 4.3, имеет вид

$$W_L(s) = \frac{k_L}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика для нее приведена на рис. 4.27. Функция же $-1/W_H(a)$, являясь в данном случае вещественной (рис. 4.26), укладывается вся на отрицательной части вещественной оси (рис. 4.27). При этом на участке изменения амплитуды $b \leq a \leq b\sqrt{2}$ амплитуда отсчитывается слева извне внутрь кривой $W_L(j\omega)$, а на участке $a > b\sqrt{2}$ — в обратную сторону. Следовательно, первая точка пересечения (a_1) дает неустойчивое периодическое решение, а вторая (a_2) — устойчивое (автоколебания). Это согласуется

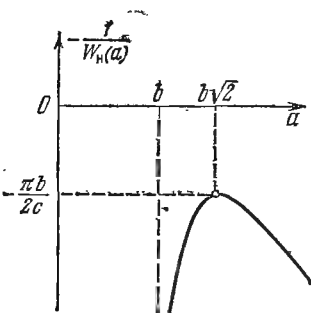


Рис. 4.26.

с прежним решением (пример 2 § 4.3).

Рассмотрим также случай петлевой характеристики реле (рис. 4.28, а) в той же следящей системе (рис. 4.13, а). Амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части та же (рис. 4.28, б). Выражение же для кривой $-1/W_H(a)$, согласно (4.52) и (4.23), принимает вид

$$-\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{\pi a}{4c \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - j \frac{b}{a} \right)^2}$$

или

$$-\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{\pi}{4c} \sqrt{a^2 - b^2} - j \frac{\pi b}{4c}.$$

Это — прямая, параллельная оси абсцисс (рис. 4.28, б), с отсчетом амплитуды a справа налево. Пересечение дает устойчивое периодическое решение (автоколебания). Чтобы получить графики зависимости амплитуды и час-

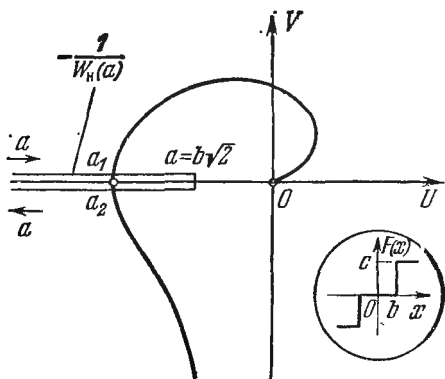


Рис. 4.27.

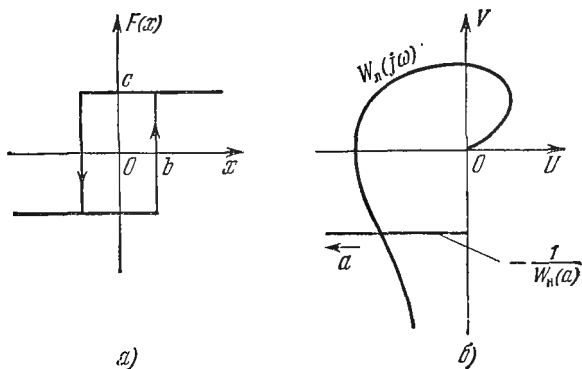


Рис. 4.28.

тоты от k_n , представленные на рис. 4.20, нужно на рис. 4.28 построить серию кривых $W_n(j\omega)$ для каждой величины k_n и найти в их точках пересечения с прямой $-1/W_n(a)$ соответствующие значения a и ω ,

§ 4.5. Несимметричные автоколебания.

Постоянные ошибки

Обратимся к нелинейной системе с внешним воздействием $f(t)$ (рис. 4.29). Тогда уравнение динамики замкнутой системы будет иметь вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t), \quad (4.58)$$

где операторный многочлен $S(p)$ зависит от места приложения внешнего воздействия. Положим правую часть уравнения (4.58) постоянной:

$$S(p)f(t) = C_f. \quad (4.59)$$

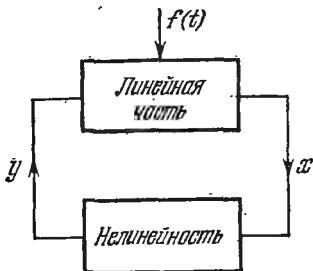


Рис. 4.29.

Это может быть в двух случаях:

- а) $f(t) = \text{const} = f^0$, $C_f = S(0)f^0$,
- б) $f(t) = f^0 + ct$ при $S(p) = pS_1(p)$, $C_f = cS_1(0)$, т. е. соответственно для систем без астатизма и с астатизмом.

Итак, рассмотрим уравнение системы в виде

$$Q(p)x + R(p)F(x) = C_f. \quad (4.60)$$

В этом случае за счет постоянной правой части уравнения появится постоянная составляющая в периодическом решении (несимметричные автоколебания). Поэтому решение ищется в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = a \sin \omega t. \quad (4.61)$$

Величина x^0 характеризует постоянную статическую или скоростную ошибку системы.

Однако несимметричные колебания могут иметь место и при отсутствии внешнего воздействия, т. е. в системе

$$Q(p)x + R(p)F(x) = 0, \quad (4.62)$$

если $F(x)$ — несимметричная нелинейность. Это проиллюстрировано на рис. 4.30, где постоянная составляющая F^0 на выходе нелинейности возникает даже при симметричном входе $x = a \sin \omega t$. Затем постоянная составляющая

щая, вообще говоря, пройдет и на вход x через линейную часть системы и приведет к решению вида (4.61). Следовательно, статическая ошибка в нелинейной системе может иметь место и без внешнего воздействия — за счет несимметрии нелинейности.

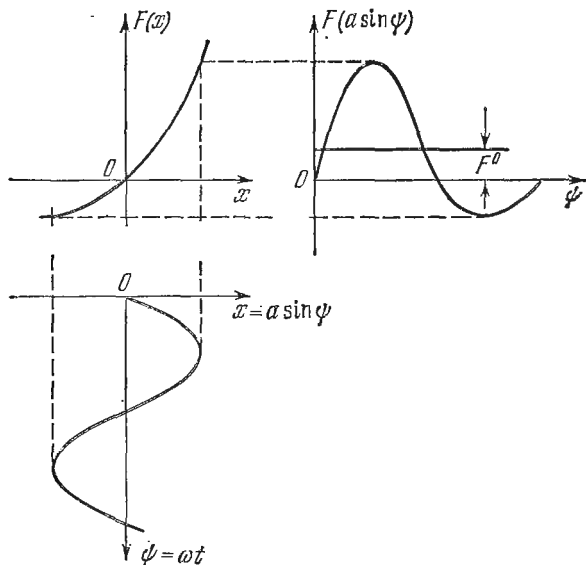


Рис. 4.30.

Гармоническая линейзация в случае несимметричных колебаний имеет вид (4.15), г. е.

$$F(x) = F^0(x^0, a) + \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] x^*, \quad (4.63)$$

где x^0 — постоянная составляющая (4.16), q и q' — коэффициенты гармонической линейзации (4.17). Их вычисление показано в примерах 6—10 § 4.2.

Подставим искомое решение (4.61) и результат гармонической линейзации нелинейности (4.63) в заданное уравнение системы (4.60):

$$Q(p)(x^0 + x^*) + R(p) \left[F^0 + \left(q + \frac{q'}{\omega} p \right) x^* \right] = C_f.$$

Выделим отсюда уравнение для постоянных составляющих:

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0(x^0, a) = C, \quad (4.64)$$

и уравнение для периодических составляющих:

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] \right\} x^* = 0. \quad (4.65)$$

Видно, что постоянная составляющая (x^0) и колебательная (a, ω) определяются не в отдельности, а только путем совместного решения этих уравнений.

Сначала из алгебраического уравнения (4.64) можно определить зависимость

$$x^0 = x^0(a). \quad (4.66)$$

Затем подставить эту зависимость в выражения $q(a, x^0)$ и $q'(a, x^0)$, имеющиеся для заданной нелинейности. Тогда получатся новые выражения и графики для $q(a)$ и $q'(a)$, включающие зависимость (4.66). В результате уравнение (4.65) приводится к виду (4.38). Методика решения задачи по определению a и ω остается прежней (§ 4.3 или § 4.4), но с новыми выражениями и графиками для $q(a)$ и $q'(a)$.

Заметим, что определение функции (4.66) упрощается в двух случаях, а именно:

а) при несимметричной нелинейности и без внешнего воздействия вместо (4.64) имеем

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0(x^0, a) = 0;$$

б) при наличии нулевого полюса в передаточной функции линейной части, когда $Q(p) = pQ_1(p)$, вместо (4.64) в общем случае получим

$$R(0)F^0(x^0, a) = C,$$

а без внешнего воздействия, при несимметричной нелинейности

$$F^0(x^0, a) = 0.$$

Например, при несимметричной нелинейности вида рис. 4.12, а в системе со свойством $Q(p) = pQ_1(p)$, согласно примеру 10 § 4.2, получим

$$\left(\frac{x_0}{b} + 1 \right) \left[\left(\frac{x_0}{b} + 1 \right)^2 + \frac{3a^2}{2b^2} \right] = 1.$$

Этим определяется зависимость между величиной смещения x^0 и амплитудой a , после чего используется уравнение (4.65).

Определение из уравнения (4.65) периодической составляющей x^* , т. е. величин a и ω , упрощается в случае однозначной нечетно-симметричной нелинейности $F(x)$. В этом случае, согласно (4.65), характеристическое уравнение получает вид

$$Q(\lambda) + R(\lambda)q(a, x^0) = 0, \quad (4.67)$$

а после подстановки $\lambda = j\omega$ аналогично (4.40а) придем к уравнениям

$$q(a, x^0) = -\frac{X_Q(\omega)}{X_R(\omega)},$$

$$X_Q(\omega)Y_R(\omega) - Y_Q(\omega)X_R(\omega) = 0.$$

Сравнив эти уравнения с (4.40а), получаем

$$q(a, x^0) = q_c(a_c), \quad (4.68)$$

где $q_c(a_c)$ относится к симметричным автоколебаниям в той же системе, определяемым согласно § 4.3. Сделав подстановку (4.66), будем иметь уравнение

$$q(a) = q_c(a_c), \quad (4.69)$$

где $q(a)$ — новое выражение или график, учитывающий зависимость (4.66).

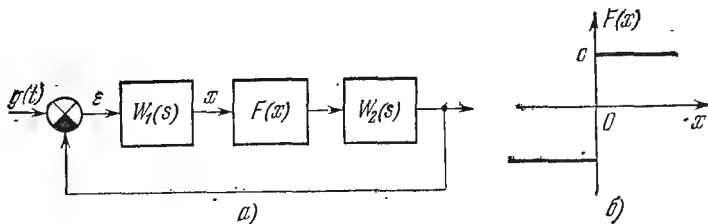


Рис. 4.31.

Таким образом, при однозначной нелинейности частота ω несимметричных автоколебаний остается такой же, как и при симметричных, независимо от величины смещения x^0 . Амплитуда же несимметричных колебаний a ,

определяемая уравнением (4.68), зависит от смещения x^0 и выражается через амплитуду симметричных автоколебаний a_c . Здесь не требуется решать уравнение (4.65).

Пример. В следящей системе (рис. 4.31, а) заданы $F(x)$ в виде рис. 4.31, б и передаточные функции

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{k_2}{s(T_2 s + 1)}.$$

Гармоническая линеаризация нелинейности (см. § 4.2) при симметричных колебаниях дает

$$F(x) = q_c(a_c)x, \quad q_c = \frac{4c}{\pi a_c}, \quad (4.70)$$

а при несимметричных —

$$F(x) = F^0(x^0, a) + q(a, x^0)x^*,$$

где, согласно (4.33),

$$F^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a}, \quad q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}. \quad (4.71)$$

Уравнение замкнутой системы относительно переменной x (рис. 4.31) имеет вид

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)px + k_1 k_2 F(x) = k_1(T_2 p + 1)pg(t). \quad (4.72)$$

При симметричных автоколебаниях ($g = 0$) имеем характеристическое уравнение

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + k_1 k_2 \frac{4c}{\pi a_c} = 0.$$

Подставив $\lambda = j\omega$, получим

$$X = k_1 k_2 \frac{4c}{\pi a_c} - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0,$$

$$Y = \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0,$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad a_c = \frac{4ck_1 k_2 T_1 T_2}{\pi(T_1 + T_2)}. \quad (4.73)$$

Рассмотрим несимметричные автоколебания при задающем воздействии $g = g_1 t$. В соответствии с (4.64),

(4.71) и (4.72) получаем уравнение для постоянных составляющих

$$k_1 k_2 \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a} = k_1 g_1,$$

откуда находим

$$x^0 = a \sin \frac{\pi g_1}{2ck_2}. \quad (4.74)$$

Подстановка (4.74) в выражение для q (4.71) дает

$$q = \frac{4c}{\pi a} \cos \frac{\pi g_1}{2ck_2}.$$

Теперь для определения амплитуды a несимметричных автоколебаний используем уравнение (4.69), а именно

$$\frac{4c}{\pi a} \cos \frac{\pi g_1}{2ck_2} = \frac{4c}{\pi a_c},$$

откуда

$$a = a_c \cos \frac{\pi g_1}{2ck_2}, \quad (4.75)$$

где a_c определяется соотношением (4.73). Тогда, согласно (4.74), постоянная составляющая (смещение) определяется в виде

$$x^0 = \frac{a_c}{2} \sin \frac{\pi g_1}{ck_2}. \quad (4.76)$$

Частота же ω несимметричных автоколебаний будет прежней — (4.73).

Результаты (4.75) и (4.76) представлены графически на рис. 4.32.

В качестве второго примера исследуем ту же систему (рис. 4.31, а), но с несимметричной нелинейностью $F(x)$ вида рис. 4.33, а при задающем воздействии $g = g_1 t$. Уравнение системы (4.72):

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x + k_1 k_2 F(x) = k_1 g_1,$$

причем

$$F(x) = F^0(x^0, a) + q(a, x^0)x^*,$$

где аналогично примеру 10 § 4.2 имеем

$$F^0 = c \left\{ \left(\frac{x^0}{b} + 1 \right) \left[\left(\frac{x^0}{b} + 1 \right)^2 + \frac{3a^2}{2b^2} \right] - 1 \right\}, \quad (4.77)$$

$$q = 3 \frac{c}{b} \left[\frac{a^2}{4b^2} + \left(\frac{x^0}{b} + 1 \right)^2 \right]. \quad (4.78)$$

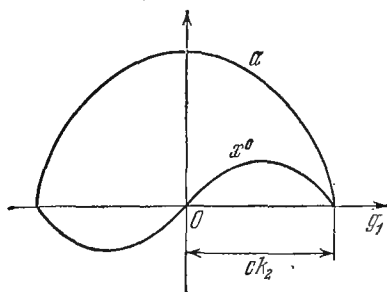


Рис. 4.32.

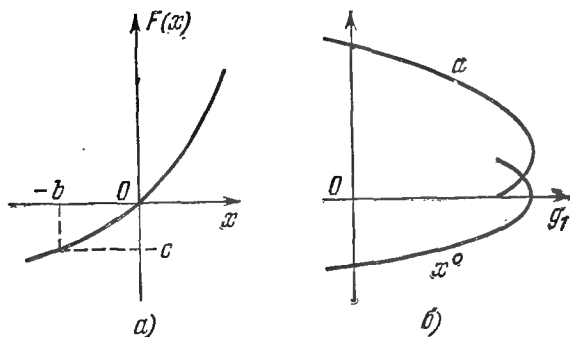


Рис. 4.33.

Уравнение для постоянных составляющих (4.64), с учетом того, что здесь $Q(0) = 0$, запишется в виде

$$k_2 F^0(x^0, a) = g_1,$$

откуда, согласно (4.77), имеем

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{3} \left[\frac{b(g_1 + k_2 c)}{k_2 c(x^0 + b)} - \left(\frac{x^0}{b} + 1 \right)^2 \right]. \quad (4.79)$$

Характеристическое уравнение для периодических составляющих в соответствии с (4.65) запишется в виде

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + k_1 k_2 q(a, x^0) = 0.$$

После подстановки $\lambda = j\omega$ получаем

$$X = k_1 k_2 q(a, x^0) - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0,$$

$$Y = \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0,$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad q(a, x^0) = \frac{T_1 + T_2}{k_1 k_2 T_1 T_2}.$$

Последнее уравнение с подстановкой (4.78) и (4.79) приобретает вид

$$\frac{b(g_1 + k_2 c)}{k_2 c (x^0 + b)} + 5 \left(\frac{x^0}{b} + 1 \right)^2 = \frac{2b (T_1 + T_2)}{c k_1 k_2 T_1 T_2}.$$

Отсюда определяется величина смещения x^0 , после чего вычисляется амплитуда a по формуле (4.79). Результаты представлены на рис. 4.33, б.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 5.1. Устойчивость. Функция Ляпунова

В учебном пособии по линейной теории автоматического управления и регулирования [23] уже давалось общее понятие устойчивости динамической системы по Ляпунову. Напомним вкратце ход наших рассуждений. Запишем уравнения динамики системы n -го порядка при отсутствии возмущающих воздействий *в общем нелинейном виде* в нормальной форме Коши:

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1)$$

Устойчивость рассматривается как свойство свободного движения системы после начального отклонения ее, вызванного любыми причинами. Пусть $y_i^*(t)$ обозначает некоторый *установившийся процесс* работы системы, или, как говорят, *невозмущенное движение*. Отклонение возмущенного движения $y_i(t)$, определяемого уравнениями (5.1) при определенных начальных условиях $y_i(t_0)$, обозначим через $x_i(t)$, т. е.

$$x_i(t) = y_i(t) - y_i^*(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Тогда можно написать уравнения возмущенного движения в отклонениях в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (5.3)$$

при этом невозмущенным движением будет $x_i = 0$. Переменные x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) являются координатами состояния системы.

В общем случае конкретный вид уравнений (5.3) зависит от вида установившегося процесса $y_i^*(t)$, так как эти уравнения получаются из (5.1) подстановкой (5.2).

Поэтому, исследуя эти уравнения необходимо, вообще говоря, оговаривать, об устойчивости какого установившегося режима или невозмущенного движения $y_i^*(t)$ идет речь.

Геометрически невозмущенное (установившееся) движение $y_i^*(t)$ системы n -го порядка можно представить

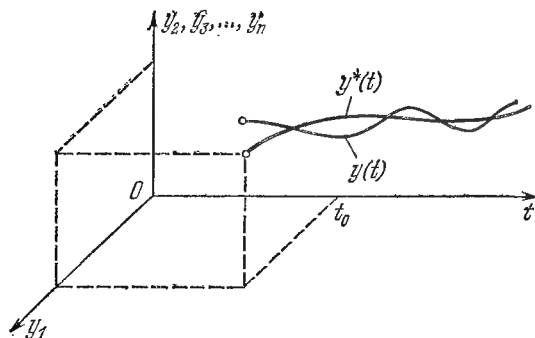


Рис. 5.1.

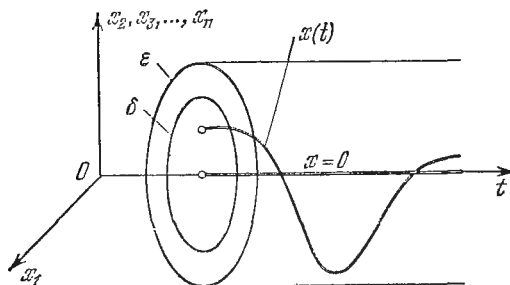


Рис. 5.2.

условно в виде некоторой интегральной кривой в n -мерном пространстве с добавленной осью времени t (рис. 5.1). Возмущенное движение $y_i(t)$, вызванное начальным отклонением при $t = t_0$, изобразится другой интегральной кривой (рис. 5.1).

В отклонениях $x_i(t)$, т. е. в пространстве координат состояния системы, эта картина возмущенного движения

будет выглядеть, как показано на рис. 5.2. При этом невозмущенное движение $x_i^* = 0$ изобразится прямой линией, совпадающей с осью t .

Невозмущенное движение системы $x_i^* = 0$ называется устойчивым, если, задав «трубку» сколь угодно малого n -мерного сечения ε (рис. 5.2), можно подобрать в начальный момент t_0 такую область начальных условий δ , зависящую от ε , что с увеличением t возмущенное движение $x_i(t)$ не выйдет из заданной трубки ε .

Аналитическое определение понятия устойчивости по Ляпунову формулируется следующим образом.

Невозмущенное движение системы $x_i^* = 0$ называется устойчивым, если при заданном $\varepsilon > 0$ сколь бы оно мало ни было, существует такое $\delta > 0$, зависящее от ε , что при начальных условиях

$$|x_i(t_0)| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.4)$$

в дальнейшем движении ($t_0 < t < \infty$) выполняется условие

$$|x_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.5)$$

Заметим, что в этом аналитическом определении области ε и δ , в отличие от рис. 5.2, выглядят «прямоугольными» (в n -мерном пространстве), что не имеет принципиального значения.

Невозмущенное движение $x_i^* = 0$ будет неустойчивым, если указанное условие не выполняется хотя бы для одного из x_i .

Если условия указанного выше определения выполнены и имеем $x_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то невозмущенное движение $x_i^* = 0$ называется асимптотически устойчивым. Если же $x_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ после любых начальных отклонений, то система называется устойчивой в целом.

Существует еще понятие абсолютной устойчивости, означающее асимптотическую устойчивость системы в целом при любом характере нелинейности внутри определенного класса нелинейностей.

В общем случае в нелинейных системах, в отличие от линейных, устойчивость состояния равновесия не означает, что будут устойчивы и все процессы в системе, так как свойства нелинейной системы меняются с изменением величин отклонений координат состояния. На-

глядным примером может служить наличие в системе второго порядка неустойчивого предельного цикла (§ 1.4). В этом случае при устойчивом состоянии равновесия система оказывается неустойчивой при больших начальных отклонениях (выходящих за границу предельного цикла), т. е. система устойчива «в малом» и неустойчива «в большом».

При определении понятия устойчивости рассматривались интегральные кривые (рис. 5.1 и 5.2). Если же представить себе не интегральную кривую, а фазовую траекторию в n -мерном пространстве для системы уравнений (5.3), то в устойчивой системе, согласно определению, она будет иметь вид, изображенный на рис. 5.3.

В последующих параграфах нам придется иметь дело с непрерывными функциями координат состояния системы $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, обладающими свойством $V = 0$ при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Такая функция V называется *знакоопределенной функцией*, если во всей рассматриваемой области, содержащей начало координат, она сохраняет один и тот же знак и обращается в нуль только в начале координат. Например, при $n = 3$

$$V = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2.$$

Знакоопределенная функция может быть *положительно определенной* или *отрицательно определенной*. Если же функция V сохраняет один и тот же знак, но обращается в нуль не только в начале координат, то такая функция называется *знакопостоянной* (положительной или отрицательной). Например, при $n = 3$ функция

$$V = (x_1 + x_2)^2 + c x_3^2$$

обращается в нуль на прямой $x_2 = -x_1$ и $x_3 = 0$.

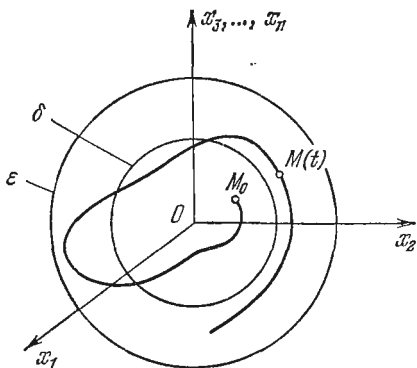


Рис. 5.3.

Наконец, функция V называется *знакопеременной*, если она в рассматриваемой области не сохраняет одного и того же знака. Например,

$$V = x_1 + x_2 + x_3.$$

Согласно известному критерию Сильвестра любая квадратичная форма n координат будет знакоопределенной (положительной) тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы ее коэффициентов будут положительными. Например, квадратичная форма

$$V = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

будет положительно определенной, так как для матрицы ее коэффициентов

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

имеем

$$\Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

и, наконец,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Описанные функции V от координат состояния системы, обращающиеся в нуль, в начале координат, играют важную роль в теоремах Ляпунова об устойчивости и неустойчивости нелинейных систем и называются *функциями Ляпунова*.

Пусть имеется нелинейная система, описываемая уравнениями динамики

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6)$$

Составим производную функции Ляпунова по времени:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Используя (5.6), в силу уравнений системы, можно записать

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \Phi_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \Phi_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \Phi_n. \quad (5.7)$$

Очевидно, что в результате получается тоже некоторая функция координат состояния системы

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.8)$$

Известно далее, что градиент функции V есть вектор, определяемый проекциями $\partial V / \partial x_i$ на оси координат, т. е.

$$\text{grad } V = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right\}.$$

Можно ввести вектор $\Phi(x)$ с проекциями, отвечающими уравнениям (5.6), а именно:

$$\Phi_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad \Phi_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad \dots, \quad \Phi_n = \frac{dx_n}{dt}.$$

Вектор $\Phi(x)$ будет вектором скорости изображающей точки M в фазовом пространстве (рис. 5.4).

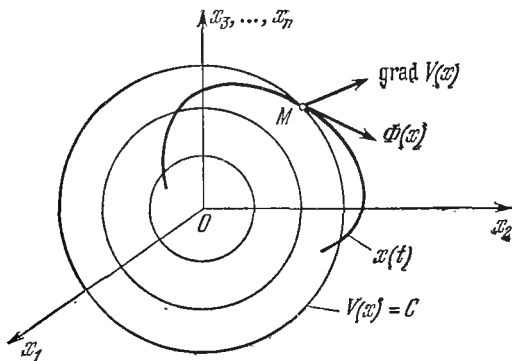


Рис. 5.4.

Согласно (5.7) получаем

$$\frac{dV}{dt} = W(x) = \text{grad } V \cdot \Phi(x), \quad (5.9)$$

где x — вектор координат состояния системы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Итак, производная функции Ляпунова по времени, составленная в силу уравнений системы, представляет собой скалярное произведение градиента этой функции на вектор фазовой скорости.

Вектор $\text{grad } V(x)$ перпендикулярен к поверхности $V = \text{const}$ и направлен в сторону возрастания значения V (рис. 5.4). Если производная $dV/dt > 0$, то, согласно (5.9), вектор фазовой скорости $\Phi(x)$ составляет с вектором $\text{grad } V(x)$ острый угол, т. е. фазовая траектория пересекает поверхность $V = \text{const}$ в сторону увеличения значений $V(x)$. Если же $dV/dt < 0$, угол между $\text{grad } V$ и $\Phi(x)$ тупой, и фазовая траектория идет в сторону уменьшения значений $V(x)$.

§ 5.2. Теоремы Ляпунова

Различают теоремы первого и второго методов Ляпунова. Теоремы первого метода Ляпунова использовались при исследовании устойчивости линеаризованных систем [23]. Здесь пойдет речь о теоремах второго, или, как иногда называют, *прямого метода Ляпунова*.

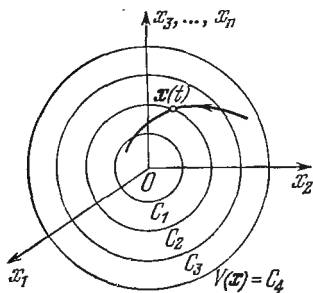


Рис. 5.5.

Теорема Ляпунова об устойчивости. Если для системы уравнений (5.6) существует знакоопределенная функция $V(x)$, производная которой $dV/dt = W(x)$ является знакопостоянной противоположного знака, то решение системы $\dot{x} = 0$ устойчиво.

На рис. 5.5 представлена геометрическая иллюстрация этой теоремы, базирующаяся на свойстве (5.9) при условии $V(x) > 0$ и $W(x) \leq 0$. При $W(x) < 0$ фазовая траектория пересекает поверхности $V = C$ извне внутрь, а в случае $W = 0$ — может остаться на такой поверхности. Поэтому в теореме говорится просто об устойчивости, но не об асимптотической устойчивости.

Доказательство теоремы. Зададим некоторое значение $\varepsilon > 0$ и область значений вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ограниченную величиной его нормы $\|x\| = \varepsilon$. Пусть имеется положительно определенная функция $V(x) > 0$. Обозначим точную нижнюю грань значений

функции $V(x)$ при $\|x\| = \varepsilon$ через $\alpha > 0$, т. е.

$$\inf_{\|x\|=\varepsilon} V(x) = \alpha > 0. \quad (5.10)$$

Поскольку $V(0) = 0$, то из непрерывности определенно положительной функции $V(x)$ следует, что можно взять такое значение $\delta > 0$, чтобы $V(x) < \alpha$ при $\|x\| < \delta$.

Пусть начальные условия лежат внутри области δ , т. е. $\|x(t_0)\| < \delta$ и, следовательно, $V(x(t_0)) < \alpha$. Тогда для решения $x(t)$ при $t > t_0$ функция $V(x(t))$ будет невозрастающей, так как по условию теоремы

$$\frac{dV}{dt} = W(x) \leq 0. \quad (5.11)$$

Итак, получаем

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) < \alpha. \quad (5.12)$$

При этом неизбежно

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad (5.13)$$

так как, если бы было $\|x(t)\| > \varepsilon$, то получилось бы

$$V(x) \geq \inf_{\|x\|=\varepsilon} V(x) = \alpha,$$

что противоречит (5.12). Теорема доказана.

Из формулировки и из доказательства теоремы видно, что теорема Ляпунова дает *достаточные условия* устойчивости решения $x=0$ нелинейной системы. Значит, если условия теоремы удовлетворяются, то система устойчива. Но это не означает, что система не может быть устойчивой и за пределами этих условий. Насколько полно условия теоремы охватят действительную область устойчивости системы, зависит от выбора функции Ляпунова V .

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если для системы уравнений (5.6) существует знакоопределенная функция $V(x)$, производная которой $dV/dt = W(x)$ является тоже знакоопределенной, но противоположного знака, то решение системы $x=0$ будет устойчивым асимптотически.

Геометрическая иллюстрация теоремы может быть представлена тем же рис. 5.5, но только с той разницей, что при $V(x) > 0$ имеем здесь $W(x) < 0$. При этом по свойству (5.9) фазовая траектория, пересекая поверхно-

сти $V = \text{const}$ извне внутрь, не может остаться на них, а пойдет внутрь вплоть до начала координат, где $x = 0$ и $V(x) = 0$.

Ход аналитического доказательства тоже остается прежним, но с изменением (5.11) на

$$\frac{dV}{dt} = W(x) < 0,$$

вследствие чего $V(x(t))$ будет монотонно убывающей функцией с нижним пределом $V(0) = 0$. Поэтому вместо (5.13) получаем

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Эта теорема, как и первая, тоже дает *достаточные* условия устойчивости, а полнота охвата действительной области устойчивости системы зависит от выбора функции Ляпунова $V(x)$.

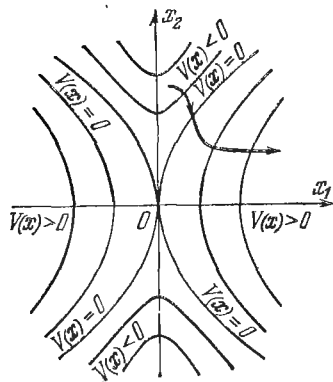


Рис. 5.6.

Поскольку обе предыдущие теоремы Ляпунова дают достаточные условия устойчивости, вообще говоря, не охватывающие всю область устойчивости системы, то может представить интерес определение условий, где система становится наверняка неустойчивой.

Теорема Ляпунова о неустойчивости. Если для системы уравнений (5.6) существует какая-нибудь функ-

ция $V(x)$, производная которой $dV/dt = W(x)$ является знакоопределенной функцией, причем в любой сколь угодно малой окрестности начала координат, имеется область, в которой знак $V(x)$ совпадает со знаком $W(x)$, то решение системы $x = 0$ неустойчиво.

Приведем геометрическую иллюстрацию теоремы для случая $n = 2$ на фазовой плоскости. Пусть функция $V(x)$ знакопеременная с линиями $V = \text{const}$, показанными на рис. 5.6, а ее производная $dV/dt = W(x)$ положительно определенная. Видно, что при произвольных

начальных условиях фазовая траектория, направляясь в соответствии со свойством (5.9), попадает в область, где $V(x) > 0$, и будет удаляться от начала координат. Если же $W(x)$ является отрицательно определенной, то фазовая траектория удаляется от начала координат в области, где $V(x) < 0$.

Аналитически это описывается следующим образом. Пусть производная $dV/dt = W(x)$ знакоопределенная положительная. Зададим некоторое значение $\varepsilon > 0$. По условиям теоремы, как бы мала ни была область начальных условий $\delta > 0$, всегда найдется часть этой области, где $V(x) > 0$. Тогда функция $V(x)$ с течением времени будет возрастать, т. е. $V(x(t)) > V(x(t_0))$ при $t > t_0$.

Поэтому в некоторый момент времени t_1 значение функции $V(x(t_1))$ перейдет величину $V(\|x\| = \varepsilon)$ и за-

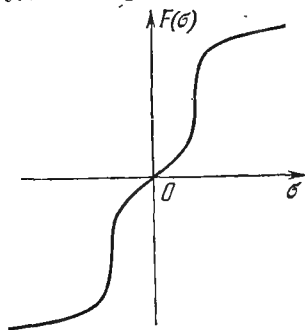


Рис. 5.7.

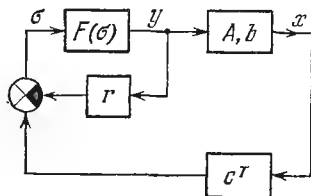


Рис. 5.8.

тем станет больше этой величины, а вместе с этим будет и $\|x(t)\| > \varepsilon$ при $t > t_1$ и при любом заданном $\varepsilon > 0$, что и говорит о неустойчивости системы.

Перейдем теперь к изложению методики применения теорем Ляпунова для исследования устойчивости нелинейных систем автоматического управления. Сделаем это для одного (достаточно широкого) класса систем с одной однозначной нелинейностью. Пусть система описывается следующими уравнениями в матричной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + by, \quad (5.14)$$

$$\frac{dy}{dt} = F(\sigma), \quad \sigma = c^T x - ry, \quad (5.15)$$

где A — невырожденная матрица $n \times n$ коэффициентов, $(\det A \neq 0)$, x — вектор координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, y, σ — скалярные координаты, b — матрица-столбец коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_n$, r — коэффициент обратной связи, c^T — транспонированная матрица-столбец $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, т. е. матрица-строка, в соответствии с которой

$$c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Нелинейная функция $F(\sigma)$ может иметь произвольную нечетно-симметричную форму (рис. 5.7), удовлетворяющую условиям

$$F(0) = 0, \quad \sigma F(\sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0. \quad (5.16)$$

Применительно к реальным системам написанные уравнения можно расписать, например, следующим образом: уравнение (5.14) представляет собой уравнения динамики управляемого объекта (рис. 5.8), а выражения (5.15) относятся к регулятору — уравнение нелинейного исполнительного устройства (привода) и уравнение измерительно-усилительного устройства и обратной связи привода.

Общий порядок системы $n + 1$. В реальных системах измеряются не все координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ состояния объекта. Поэтому некоторые отдельные коэффициенты c_i во втором уравнении (5.15) будут нулями. В реальных системах нулями будет являться и часть элементов матрицы A и столбца b .

Приведем заданную систему (5.14), (5.15) к каноническому виду путем замены переменных:

$$z = Ax + by, \quad \sigma = c^T x - ry.$$

Проделав это, получим систему уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Az + bF(\sigma), \quad \frac{d\sigma}{dt} = c^T z - rF(\sigma), \quad (5.17)$$

причем будем полагать, что матрица A приведена к диагональной форме. Должно соблюдаться условие невырожденной общей матрицы системы

$$\begin{vmatrix} A & b \\ c^T & -r \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad r + c^T A^{-1} b \neq 0. \quad (5.18)$$

Функцию Ляпунова в этом случае рекомендуется [15] брать в виде

$$V(z, \sigma) = z^T B z + \int_0^\sigma F(\sigma) d\sigma, \quad (5.19)$$

где B — некоторая положительно определенная квадратичная форма n координат z . Интеграл в этом выражении тоже является, как легко проверить, положительно определенной функцией $(n+1)$ -й координаты σ .

Составим производную функции Ляпунова (5.19) в силу уравнений системы (5.17):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dz^T}{dt} B z + z^T B \frac{dz}{dt} + F(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} = \\ &= z^T (A^T B + B A) z + F(\sigma) (b^T B z + z^T B b) + F(\sigma) c^T z - r F^2(\sigma). \end{aligned}$$

Матрица квадратичной формы B является симметричной, т. е. $B^T = B$. Поэтому можно сделать следующее преобразование:

$$b^T B z + z^T B b = (bB)^T z + (Bb)^T z = 2(Bb)^T z.$$

Далее обозначим $G = -(A^T B + B A)$ и покажем, что матрица G симметричная. В самом деле,

$$\begin{aligned} G^T &= -(A^T B + B A)^T = -(B^T A + A^T B^T) = \\ &= -(B A + A^T B) = G. \end{aligned}$$

Итак, получаем

$$\frac{dV}{dt} = -z^T G z - r F^2(\sigma) + 2F(\sigma) \left(Bb + \frac{1}{2} c \right)^T z.$$

Это выражение представляет собой квадратичную форму. Согласно теоремам Ляпунова об устойчивости производная dV/dt должна быть либо знакоопределенной, либо знакопостоянной отрицательной функцией. Обратимся к критерию Сильвестра для установления положительной определенности функции $-dV/dt$. Поскольку G является матрицей положительно определенной квадратичной формы, то первые n неравенств кри-

терия Сильвестра выполняются. Остается потребовать, чтобы

$$\begin{vmatrix} G & -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Bb + \frac{1}{2}c\right)^T & r \end{vmatrix} > 0.$$

Отсюда

$$r > \left(Bb + \frac{1}{2}c\right)^T G^{-1} \left(Bb + \frac{1}{2}c\right). \quad (5.20)$$

Следовательно, при выполнении условия (5.20) совместно с условием (5.18) система будет устойчива асимптотически. Это является достаточным условием асимптотической устойчивости решения $z = 0$, $\sigma = 0$.

Видно, что в условия устойчивости (5.20) и (5.18) не вошли никакие параметры нелинейной характеристики $F(\sigma)$. Следовательно, эти условия справедливы при любой форме нелинейности, удовлетворяющей общим требованиям (5.16). Такие условия устойчивости, которые не зависят от конкретной формы нелинейности, называются *условиями абсолютной устойчивости* системы.

§ 5.3. Пример исследования устойчивости методом Ляпунова

В качестве примера исследуем систему управления курсом самолета (рис. 5.9). Уравнение движения самолета в упрощенном виде имеет вид

$$(T_1 p + 1) p \psi = -k_1 \delta, \quad p \delta = F(u), \quad (5.21)$$

где ψ — угол отклонения оси самолета по курсу, δ — угол отклонения руля, $F(u)$ — нелинейная характеристика привода руля (рис. 5.10, а), причем

$$\frac{dF}{du} \geq 0, \quad F(u) \begin{cases} > 0 & \text{при } u > b, \\ < 0 & \text{при } u < -b, \\ = 0 & \text{при } |u| \leq b. \end{cases} \quad (5.22)$$

Измерительно-усилительное устройство с обратной связью привода описывается выражением

$$u = k_\psi \psi + k_{p\psi} p \psi - k_{oc} \delta. \quad (5.23)$$

Для перехода к каноническим уравнениям представим уравнение самолета (5.21) в виде

$$\frac{1}{k_1} p^2 \psi = - \left(\frac{1}{T_1 k_1} p \psi + \frac{1}{T_1} \delta \right)$$

и обозначим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{T_1 k_1} p \psi + \frac{1}{T_1} \delta, & x_2 &= -\frac{1}{T_1} \delta, \\ x_3 &= \frac{1}{T_1 k_1 k_{p\psi}} u = \frac{1}{T_1 k_1 k_{p\psi}} (k_\psi \psi + k_{p\psi} p \psi - k_{oc} \delta). \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

В связи с последним обозначением нелинейная характеристика $F(u)$ заменится на $f(x_3)$ (рис. 5.10, б), где

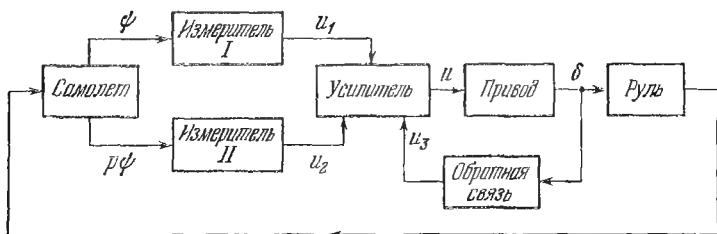


Рис. 5.9.

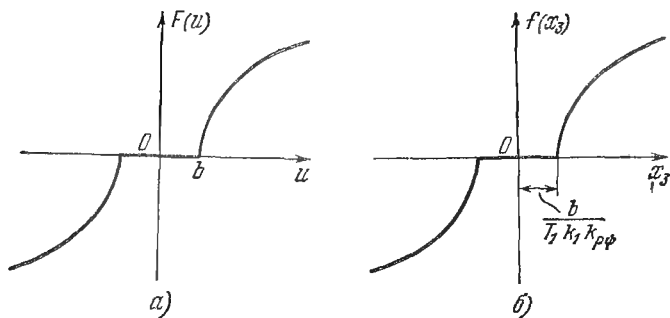


Рис. 5.10.

изменится лишь масштаб по оси абсцисс. Поэтому зона нечувствительности вместо b (рис. 5.10, а) будет иметь размер $b/(T_1 k_1 k_{p\psi})$.

Введем безразмерное время $\tau = t/T_1$. Тогда система уравнений (5.21), (5.23) преобразуется к каноническому виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -x_1 + f(x_3), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -f(x_3), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= (\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - rf(x_3), \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

где

$$\gamma = \frac{T_1 k_\psi}{k_{p\psi}}, \quad r = \frac{k_{oc}}{k_1 k_{p\psi}}. \quad (5.26)$$

Как видно из уравнений (5.21) — (5.24), установившийся режим полета, устойчивость которого надо исследовать, определяется значениями $\delta = 0$, $p\psi = 0$, $|\psi| < b/k_\psi$ или $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $|x_3| < b/T_1 k_1 k_{p\psi}$, что иллюстрируется отрезком AB на рис. 5.11. Рассмотрим отдельно два случая $\gamma > 1$ и $0 < \gamma < 1$.

Рис. 5.11.

1. Случай $\gamma > 1$. Функция Ляпунова берется в виде

$$V(x) = \frac{\gamma - 1}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3. \quad (5.27)$$

Производная от нее

$$W(x) = \frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\tau},$$

или в силу уравнений системы (5.25) после простых преобразований имеем

$$W(x) = -(\gamma - 1)[f(x_3) - x_1]^2 - (r - \gamma + 1)[f(x_3)]^2.$$

Функция $V(x)$ (5.27) является положительно определенной. Производная же $W(x)$ от нее будет отрицательной знакопостоянной при условии

$$r > \gamma - 1, \text{ если } \gamma > 1. \quad (5.28)$$

Это и является следствием, условием устойчивости системы согласно теореме Ляпунова.

Заметим, что $dV/d\tau = W(x)$ обращается в нуль, когда $x_1 = 0$ и $f(x_3) = 0$ при любом значении x_2 , т. е. на всей полосе, изображенной на рис. 5.12. Поэтому интересно проверить, не застрянет ли изображающая точка на этой полосе, если фазовая траектория попадет туда. Из уравнений (5.25) на этой полосе имеем

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = \gamma x_2.$$

Следовательно, фазовая траектория будет проходить через полосу в направлении, параллельном оси x_3 , как показано на рис. 5.12, и не застрянет на ней.

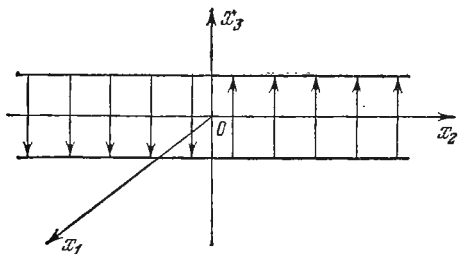


Рис. 5.12.

2. Случай $0 < \gamma < 1$. Функция Ляпунова берется в виде

$$V(x) = \frac{1-\gamma}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3.$$

Производная от нее в силу уравнений системы (5.25):

$$W(x) = \frac{dV}{d\tau} = -(1-\gamma) x_1^2 - r [f(x_3)]^2.$$

Отсюда условие устойчивости системы, как условие отрицательного знакопостоянства функции $W(x)$, принимает вид

$$r > 0, \quad \text{если} \quad 0 < \gamma < 1. \quad (5.29)$$

В соответствии с обозначениями (5.26) через исходные параметры системы условия устойчивости (5.28) и

(5.29) запишутся в виде соответственно

$$\left. \begin{aligned} k_{oc} &> (T_1 k_\psi - k_{p\psi}) k_1, & \text{если } k_{p\psi} < T_1 k_\psi, \\ k_{oc} &> 0, & \text{если } k_{p\psi} > T_1 k_\psi, \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

что графически изображено на рис. 5.13, а. Этот результат физически понятен: коэффициент дополнительной обратной связи k_{oc} должен быть достаточно большим, если коэффициент интенсивности введения производной от ошибки $k_{p\psi}$ взят сравнительно малым. Устойчивость системы не зависит от величины коэффициента обратной связи, если производная введена с достаточно большим коэффициентом.

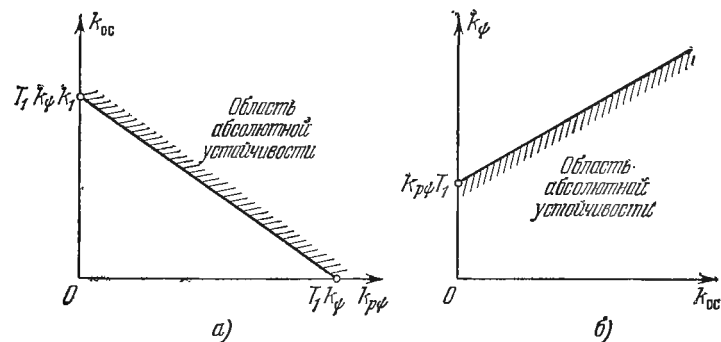


Рис. 5.13.

Согласно (5.30) имеем (при положительных коэффициентах)

$$k_\psi < \frac{k_{oc} + k_{p\psi} k_1}{T_1 k_1},$$

т. е. основной коэффициент усиления автопилота k_ψ можно увеличить за счет усиления обоих стабилизирующих средств: k_{oc} и $k_{p\psi}$, что показано графически на рис. 5.13, б.

Поскольку в условия устойчивости нелинейной системы (5.30) не вошли параметры самой нелинейности, они являются условиями абсолютной устойчивости системы при любой форме однозначной нелинейности, удовлетворяющей лишь условию (5.22).

§ 5.4. Исследование устойчивости методом гармонической линеаризации

Для нелинейных систем с одной нелинейностью, обладающих свойством фильтра (§ 4.1), можно определять устойчивость как свойство затухания переходных процессов. Это непосредственно вытекает из материала § 4.3 (см., например, рис. 4.16, 4.18). При этом граница устойчивости может быть определена как граница области существования периодических собственных колебаний в системе ($K = K_{гр}$ на рис. 4.16, 4.18) т. е. как граница появления пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении *гармонически линеаризованной системы*. А это в свою очередь можно определить, приравняв нулю предпоследний определитель Гурвица

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad (5.31)$$

если все Δ -стальные определители положительны (для систем третьего и четвертого порядка это означает просто положительность коэффициентов характеристического уравнения).

Ограничимся рассмотрением однозначных нечетных нелинейностей $F(x)$, гармоническая линеаризация которых имеет вид

$$F(x) = q(a)x. \quad (5.32)$$

Величина коэффициента $q(a)$, как видно из графиков, полученных в § 4.2, меняется в зависимости от a в различных пределах для различных форм однозначных нелинейностей. Для одних — в пределах

$$0 \leq q \leq \infty, \quad (5.33)$$

для других — с некоторыми конечными предельными значениями:

$$0 \leq q \leq r_1, \quad r_1 \leq q \leq \infty, \quad r_1 \leq q \leq r_2, \quad (5.34)$$

где r_1 и r_2 — определенные числа для каждой нелинейности (см. § 4.2). Бесконечный интервал (5.33) охватывает все виды однозначных нелинейностей.

Для отыскания границы устойчивости системы (5.31), как границы появления периодических колебаний с какой-либо амплитудой a , надо потребовать выполнения

равенства $\Delta_{n-1}(q) = 0$ хотя бы при каком-либо одном значении q в возможном для данной нелинейности интервале (5.33) или (5.34).

Область же устойчивости системы будет лежать с той стороны этой границы, где

$$\Delta_{n-1}(q) > 0 \quad (5.35)$$

при всех возможных для данной нелинейности значениях q . Так, в примере 1 § 4.3 имеем $k \geq q \geq 0$, причем граница устойчивости (5.31) получается при $q = k$, а условие (5.35) выполняется, согласно (4.48), при

$$kk_{\text{л}} < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Аналогично в примере 2 § 4.3 имеем $0 \leq q \leq q_{\text{max}}$, $q_{\text{max}} = 2c/\pi b$, и граница устойчивости (5.31) достигается при $q = q_{\text{max}}$, а область устойчивости (5.35)

$$k_{\text{л}} < \frac{\pi b}{2c} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right).$$

Если же речь идет об определении абсолютной устойчивости при любой форме однозначной нелинейности, удовлетворяющей лишь условию (5.16), т. е.

$$F(0) = 0, \quad xF(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \quad (5.36)$$

или (5.22) при наличии зоны нечувствительности, то надо потребовать удовлетворения условия (5.35) при любом значении q в бесконечном интервале (5.33).

Граница (5.31) области абсолютной устойчивости (5.35) определяется обращением в нуль минимально возможного при $0 \leq q \leq \infty$ значения Δ_{n-1} . Это минимальное значение может получаться как при конечном значении q внутри интервала $[0, \infty]$ (рис. 5.14, а), так и при одном из крайних значений $q = 0$ или $q = \infty$ (рис. 5.14, б). Иначе говоря, граница устойчивости может быть определена из пары условий

$$\Delta_{n-1}(q) = 0, \quad \frac{\partial \Delta_{n-1}}{\partial q} = 0, \quad (5.37)$$

или

$$\Delta_{n-1}(q) = 0, \quad q = 0, \quad (5.38)$$

или же

$$\Delta_{n-1}(q) = 0, q = \infty. \quad (5.39)$$

Приведем примеры.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим абсолютную устойчивость той же системы управления курсом самолета (рис. 5.9), которая в § 5.3 исследовалась методом Ляпунова. Проведя гармоническую линеаризацию нелинейности $F(u) = q(a)u$, получим, согласно

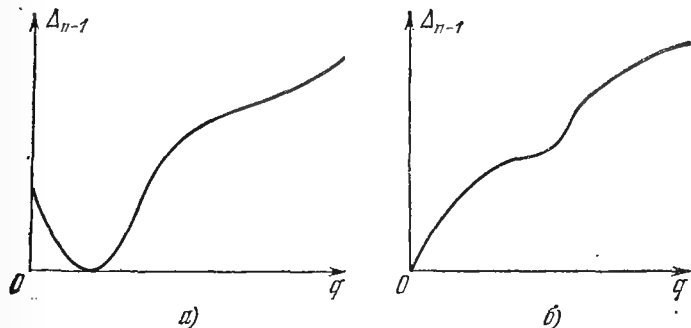


Рис. 5.14.

уравнениям (5.21) — (5.23), характеристическое уравнение системы в виде

$$T_1 \lambda^3 + [1 + T_1 k_{oc} q(a)] \lambda^2 + q(a) (k_{oc} + k_1 k_{p\psi}) \lambda + k_1 k_{\psi} q(a) = 0.$$

Условия (5.37) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{n-1} &= (1 + T_1 k_{oc} q) (k_{oc} + k_1 k_{p\psi}) q - T_1 k_1 k_{\psi} q = 0, \\ \frac{\partial \Delta_{n-1}}{\partial q} &= 2 T_1 k_{oc} (k_{oc} + k_1 k_{p\psi}) q + k_{oc} + k_1 k_{p\psi} - T_1 k_1 k_{\psi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

Оба они удовлетворяются при $q = 0$, если

$$k_{oc} + k_1 k_{p\psi} - T_1 k_1 k_{\psi} = 0. \quad (5.41)$$

Это — граница устойчивости (типа (5.38)). Условие же устойчивости $\Delta_{n-1} > 0$ при любом положительном значении q , как нетрудно видеть, запишется в виде

$$k_{oc} + k_1 k_{p\psi} - T_1 k_1 k_{\psi} > 0,$$

откуда непосредственно вытекают оба условия (5.30) и оба графика рис. 5.13, полученные методом Ляпунова. Такое совпадение имеет место не только в данном примере, но и для большого класса нелинейных систем [22].

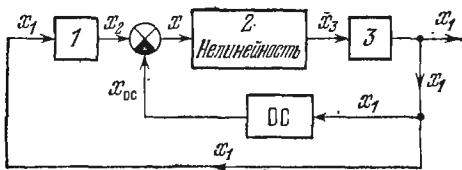


Рис. 5.15.

Пример 2. Система (рис. 5.15) задана уравнениями

$$\begin{aligned}(T_1 p + 1)x_2 &= -k_1 x_1, \\ x_3 &= F(x), \quad x = x_2 - k_{oc} x_1, \\ (T_2 p + 1)p x_1 &= k_2 x_3.\end{aligned}$$

При замене $F(x) = qx$ получаем характеристическое уравнение

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + (1 + T_1 k_2 k_{oc} q) \lambda + (k_1 + k_{oc}) k_2 q = 0.$$

Предпоследний определитель Гурвица

$$\Delta_{n-1} = (T_1 + T_2) (1 + T_1 k_2 k_{oc} q) - T_1 T_2 (k_1 + k_{oc}) k_2 q.$$

На границе устойчивости, согласно (5.37), имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{n-1} &= T_1 + T_2 + T_1 k_2 (T_1 k_{oc} - T_2 k_1) q = 0, \\ \frac{\partial \Delta_{n-1}}{\partial q} &= T_1 k_2 (T_1 k_{oc} - T_2 k_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Отсюда — граница абсолютной устойчивости, имеющая место при $q = \infty$:

$$k_{oc} = \frac{T_2 k_1}{T_1}. \quad (5.43)$$

В предыдущем примере условие устойчивости определялось условием (5.38), т. е. $q = 0$. Здесь же имеет место случай (5.39), т. е. $q = \infty$. Очевидно далее, что условие абсолютной устойчивости системы $\Delta_{n-1} > 0$, согласно

(5.42), при любом значении q определяется неравенством $k_{oc} > T_2 k_1 / T_1$. В соответствии с этим область устойчивости представлена графически на рис. 5.16.

В [22] имеются примеры, когда условия границы устойчивости (5.37) выполняются не только при крайних значениях $q = 0$ или $q = \infty$, как здесь, но при промежуточных конечных значениях q в соответствии с рис. 5.14. а.

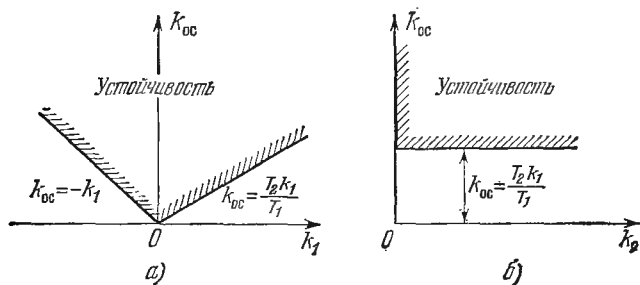


Рис. 5.16.

Рассмотрим теперь влияние конкретной формы нелинейности на устойчивость нелинейной системы в обоих характерных случаях, приведенных в примерах 1 и 2.

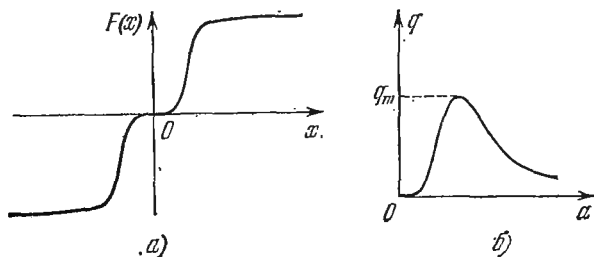


Рис. 5.17.

Пример 3. Пусть в примере 1 задана конкретная форма нелинейности (рис. 5.17, а), для которой коэффициент гармонической линеаризации q лежит в интервале

$$0 \leq q \leq q_m. \quad (5.44)$$

Поскольку граница устойчивости (5.41) определялась наименьшим значением $q = 0$, то она останется той же и при данной конкретной форме нелинейности. Но здесь следующим образом может быть определена область неустойчивости системы (в целом).

Равенство $\Delta_{n-1} = 0$, определяемое формулой (5.40), при $q = 0$ дает границу устойчивости, а при всех остальных значениях $q(a)$ в интервале (5.44) равенство (5.40) определяет автоколебания. Но это возможно, согласно (5.40), только при условии

$$k_{\psi} < \frac{k_{oc} + k_1 k_{p\psi}}{T_1 k_1} (1 + T_1 k_{oc} q_m). \quad (5.45)$$

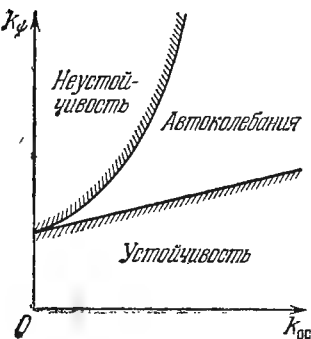


Рис. 5.18.

Иначе окажется $\Delta_{n-1} < 0$ при любых значениях q в интервале (5.44), т. е. система неустойчива.

В результате получаем в данной системе три области (рис. 5.18): устойчивости, автоколебаний и неустойчивости. Здесь граница устойчивости определяется формулой (5.41), а граница неустойчивости, согласно (5.45),

$$k_{\psi} = \frac{k_{oc} + k_1 k_{p\psi}}{T_1 k_1} (1 + T_1 k_{oc} q_m).$$

Однако во многих случаях нежелательно входить и в область автоколебаний. Тогда выбор параметров системы ограничивается областью устойчивости.

Пример 4. Пусть та же конкретная форма нелинейности (рис. 5.17, а) фигурирует в примере 2, приведенном выше.

Поскольку граница абсолютной устойчивости (5.42) получается при $q = \infty$, то ограничение значений q интервалом (5.44) расширит область устойчивости. Вместо (5.43) из (5.42) при $q = q_m$ получим новую границу

$$k_{oc} = \frac{T_2 k_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 k_2 q_m}.$$

В соответствии с этим область устойчивости при конкретной форме нелинейности вместо общего случая (рис. 5.16) расширится, как показано на рис. 5.19. За этой границей имеет место область автоколебаний.

В заключение заметим, что описанное выше исследование устойчивости нелинейной системы методом гар-

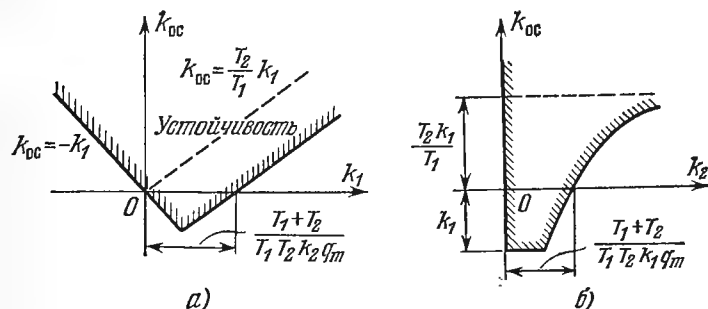


Рис. 5.19.

монической линеаризации может быть выполнено и с привлечением критерия Михайлова вместо критерия Гурвица. Подставив в левую часть характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы $\lambda = j\omega$ и выделив вещественную и мнимую части

$$D(j\omega, q) = X(\omega, q) + jY(\omega, q),$$

надо потребовать выполнения критерия Михайлова при всех возможных значениях q (5.33) или (5.34).

Иначе границу устойчивости можно определить как границу области, в которой

$$X(\omega, q) = 0, \quad Y(\omega, q) = 0,$$

т. е. как границу области существования автоколебаний. Это бывает удобно в более сложных случаях. Пример будет рассмотрен в конце § 7.2 (пример 4).

§ 5.5. Частотный критерий абсолютной устойчивости

Выше мы уже получали условия абсолютной устойчивости в различных случаях. Аналогично для цели исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем

служит частотный критерий устойчивости В. М. Попова. Он дает достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейной системы по виду частотной характеристики линейной части системы.

Пусть в системе имеется одна однозначная нелинейность $F(x)$ (рис. 5.20). Рассмотрим два случая расположения

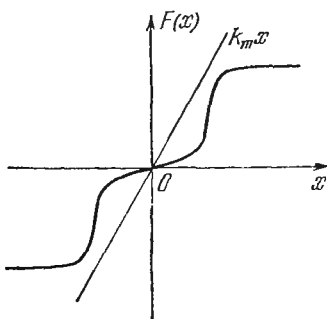


Рис. 5.20.

характеристики: первый — нелинейная характеристика расположена в секторе $[0, k_m]$, как на рис. 5.20, второй — в секторе $[k_0, k_m]$, что будет показано ниже.

Начнем с первого случая:

$$0 < F(x) < k_m x. \quad (5.46)$$

Линейная часть системы описывается уравнением

$$Q(p)x = -R(p)y,$$

причем степень многочлена $Q(p)$ больше степени многочлена $R(p)$. Передаточная функция линейной части $W(s) = R(s)/Q(s)$ имеет полюсы с отрицательными вещественными частями, причем допускается наличие не более двух нулевых полюсов.

Приведем без доказательства формулировку теоремы В. М. Попова (доказательство см. в [31]).

Теорема Попова. Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчивым, если нелинейная характеристика находится в секторе $[0, k_m]$ и существует такое действительное число h , что при всех $\omega \geq 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} [(1 + j\omega h) W(j\omega)] + \frac{1}{k_m} > 0, \quad (5.47)$$

где $W(j\omega)$ — амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы.

Для удобства графического представления этого критерия вводится модифицированная частотная характеристика линейной части

$$W_m(j\omega) = U_m(\omega) + jV_m(\omega),$$

где

$$U_m(\omega) = U(\omega), \quad V_m(\omega) = \omega V(\omega). \quad (5.48)$$

Следовательно, график $W_m(j\omega)$ имеет вид, аналогичный амплитудно-фазовой характеристике линейной части $W(j\omega)$ и отличается от нее только масштабом по мнимой оси (рис. 5.21). Поскольку выражение (5.47) можно записать в виде

$$U(\omega) - \omega h V(\omega) + \frac{1}{k_m} > 0,$$

то с подстановкой (5.48) оно преобразуется к виду

$$U_m(\omega) - h V_m(\omega) + \frac{1}{k_m} > 0. \quad (5.49)$$

Выражение

$$U_m - h V_m + \frac{1}{k_m} = 0 \quad (5.50)$$

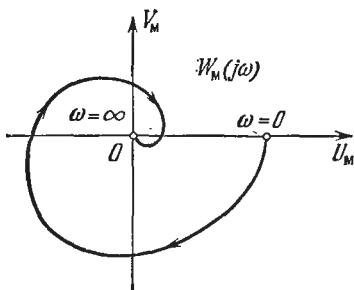


Рис. 5.21.

представляет собой уравнение прямой на плоскости прямоугольных координат U_m, V_m . Эта прямая проходит через точку $-1/k_m$ на оси U_m и имеет крутизну наклона $1/h$.

Отсюда вытекает следующая формулировка.

Критерий абсолютной устойчивости. *Состояние равновесия нелинейной системы абсолютно устойчиво, если нелинейная характеристика $F(x)$ находится внутри сектора $[0, k_m]$ и можно провести через точку $-1/k_m$ прямую так, что она не пересечет модифицированную частотную характеристику (последняя лежит справа).*

На рис. 5.22 показаны случаи, когда критерий абсолютной устойчивости выполняется, а на рис. 5.23 — когда не выполняется.

Интересно получить с помощью этого критерия условия абсолютной устойчивости для той же системы самолета с нелинейным автопилотом, которая была рассмотрена выше методом Ляпунова (§ 5.3) и методом гармонической линеаризации (§ 5.4). Особенность там состоит в том, что допускалось расположение нелинейной характеристики во всей I (и III) четверти, т. е. в секторе

$[0, k_m]$, где $k_m = \infty$. Поэтому прямая в частотном критерии должна проходить через начало координат.

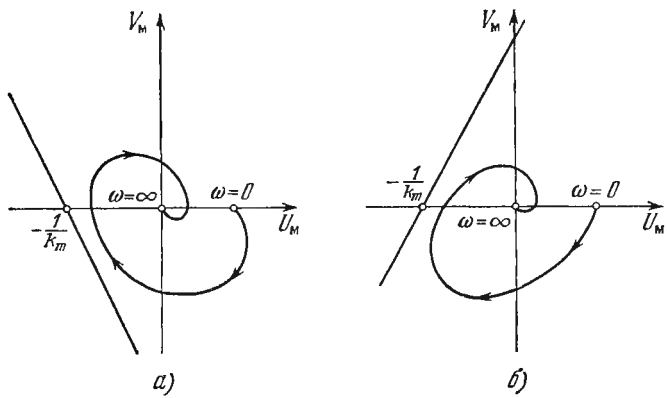


Рис. 5.22.

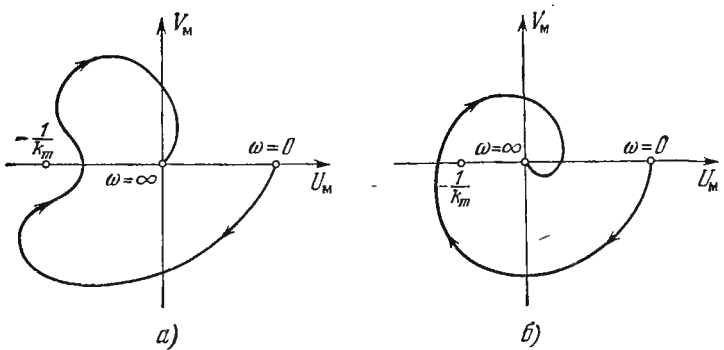


Рис. 5.23.

Решим эту задачу сначала аналитически, а затем проиллюстрируем графически. Условие (5.47) при $k_m = \infty$ принимает вид

$$\text{Re}(1 + j\omega h)W(j\omega) > 0, \tag{5.51}$$

а вместо (5.49) получаем

$$U_M(\omega) - hV_M(\omega) > 0. \tag{5.52}$$

Для указанного примера (§ 5.3) уравнения (5.25) можно преобразовать к виду

$$y = f(x_2), \quad (1 + p)p^2 x_3 = [rp^2 + (1 + r)p + \gamma]y,$$

где обозначено $y = -px_2$, причем p — операторный символ производной по τ ($p = d/d\tau$). Передаточная функция линейной части системы записывается в виде

$$W(s) = \frac{rs^2 + (1 + r)s + \gamma}{(1 + s)s^2},$$

а следовательно,

$$W(j\omega) = \frac{-r\omega^2 + j(1 + r)\omega + \gamma}{-\omega^2(1 + j\omega)}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $1 - j\omega$, получим

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{\gamma + \omega^2}{-\omega^2(1 + \omega^2)},$$

$$\operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{(1 + r - \gamma)\omega + r\omega^3}{-\omega^2(1 + \omega^2)},$$

а согласно (5.48)

$$U_M = \frac{\gamma + \omega^2}{-\omega^2(1 + \omega^2)}, \quad V_M = \frac{1 + r - \gamma + r\omega^2}{-(1 + \omega^2)}. \quad (5.53)$$

Неравенство (5.52) принимает вид

$$-(\gamma + \omega^2) + h\omega^2(1 + r - \gamma + r\omega^2) > 0. \quad (5.54)$$

Очевидно, что это неравенство может быть выполнено при любом $\omega \geq 0$, если

$$1 + r - \gamma > 0 \quad (5.55)$$

и если h берется сколь угодно большим, чтобы обеспечить неравенство (5.54) при сколь угодно малых ω .

Полученное условие (5.55) выполняется при

$$\begin{aligned} r &> \gamma - 1, & \text{если } \gamma > 1, \\ r &> 0, & \text{если } 0 < \gamma < 1, \end{aligned}$$

что точно совпадает с найденными ранее условиями абсолютной устойчивости данной системы (5.28) и (5.29).

Смысл практической реализации этих условий был разъяснен в § 5.3.

Графически критерий устойчивости выражается в том, что вся кривая $W_m(j\omega) = U_m(\omega) + jV_m(\omega)$, построенная согласно (5.53), расположена (рис. 5.24, а) справа от прямой $U_m - hV_m = 0$, обозначенной штрих-пунктирной линией, со сколь угодно малым наклоном, если $1 + r -$

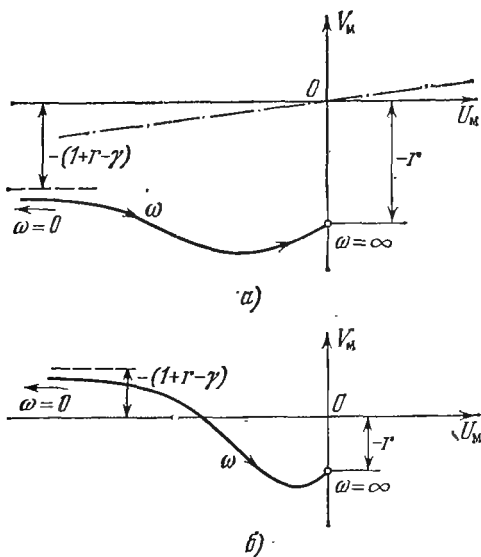


Рис. 5.24.

$-\gamma > 0$. Если же $1 + r - \gamma < 0$ (рис. 5.24, б), то такую прямую провести невозможно и, следовательно, нелинейная система не будет абсолютно устойчивой.

Здесь был приведен простой пример, в котором условия устойчивости выражаются в аналитическом виде. В большинстве технических задач этого не получится. Однако видно, что описанный частотный критерий устойчивости в его графической форме может быть применен для систем с одной однозначной нелинейностью при любой сложности линейной части системы и численно заданных коэффициентах уравнений.

Перейдем к случаю, когда нелинейная характеристика $F(x)$ расположена в секторе $[k_0, k_m]$, т. е.

$$k_0 x < F(x) < k_m x, \quad (5.56)$$

что показано на рис. 5.25. Здесь неравенство (5.47) в теореме В. М. Попова принимает вид

$$\operatorname{Re} \left[(1 + j\omega h) \frac{W(j\omega)}{1 + k_0 W(j\omega)} \right] + \frac{1}{k_m - k_0} > 0. \quad (5.57)$$

После преобразований приходим к выражению

$$U^2(\omega) + \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_m} \right) U(\omega) - \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_m} \right) h\omega V(\omega) + V^2(\omega) + \frac{1}{k_0 k_m} > 0.$$

Введя в рассмотрение модифицированную частотную характеристику (5.48), получаем, что уравнение

$$U_m^2 + \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_m} \right) U_m - \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_m} \right) h V_m + V_m^2 + \frac{1}{k_0 k_m} = 0$$

на плоскости координат модифицированной частотной

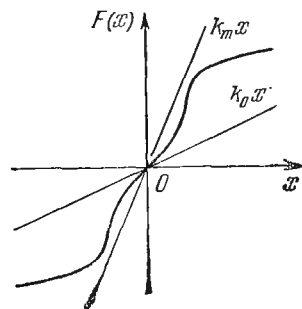


Рис. 5.25.

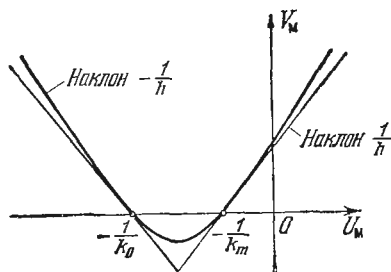


Рис. 5.26.

характеристики (U_m, V_m) дает параболу, проходящую через точки $-1/k_0$ и $-1/k_m$ и имеющую в этих точках крутизну наклона касательных соответственно $-1/h$ и $1/h$. Построение параболы ясно из рис. 5.26.

Формулировка критерия следующая. Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчиво,

если нелинейная характеристика находится внутри сектора $[k_0, k_m]$ и можно провести через точки $-1/k_0$ и $-1/k_m$ такую параболу с вертикальной осью, чтобы модифицированная частотная характеристика линейной части лежала вне этой параболы.

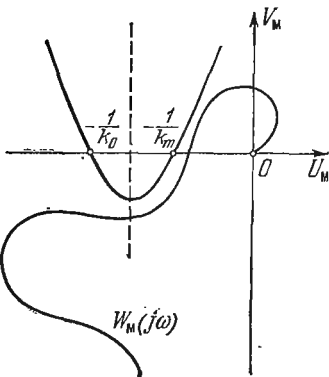


Рис. 5.27.

Иллюстрация выполнения критерия дана на рис. 5.27, откуда легко видеть, что этот критерий устойчивости дает более широкую область устойчивости, чем предыдущий. Видно, что на рис. 5.27 нельзя провести прямую через точку $-1/k_m$ так, чтобы она не пересекала модифицированную частотную характеристику $W_M(j\omega)$. Следовательно, данная система, абсолютно ус-

тойчивая при нелинейности, расположенной в секторе $[k_0, k_m]$, не будет обладать абсолютной устойчивостью (в смысле достаточных условий), если сектор расположения нелинейности расширится до $[0, k_m]$. Это вполне естественный результат.

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 6.1. Одночастотные вынужденные колебания. Частотные характеристики

Исследование вынужденных колебаний нелинейных систем представляет собой в общем сложную задачу в связи с отсутствием суперпозиции отдельных решений, а также существенным изменением поведения системы в зависимости от размера амплитуды колебаний, с наличием не единственного установившегося режима и возможностью перескоков с одного режима на другой, с особенностями высших гармоник, субгармоник, комбинационных частот и с многими другими факторами.

В данном параграфе мы рассмотрим случай одночастотных вынужденных колебаний, т. е. колебаний нелинейной системы с частотой внешнего периодического воздействия, и найдем условия их существования.

Рассмотрим нелинейную систему с внешним воздействием (рис. 6.1), заданным в виде

$$f(t) = B \sin \omega t. \quad (6.1)$$

Уравнение динамики системы имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t). \quad (6.2)$$

Решение для вынужденных колебаний будем искать приближенно в форме

$$x = a \sin (\omega t + \varphi), \quad (6.3)$$

где ω задано, а неизвестными являются амплитуда a и фаза φ .

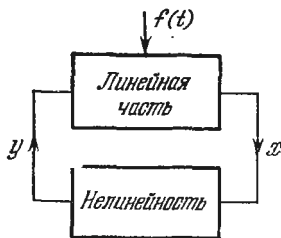


Рис. 6.1.

Произведем гармоническую линеаризацию нелинейности:

$$F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x, \quad (6.4)$$

где коэффициенты $q(a)$ и $q'(a)$ вычисляются для симметричных (нечетных) нелинейностей по прежним формулам (4.11), если в них положить $\psi = \omega t + \varphi$. Для конкретных нелинейностей можно здесь использовать формулы, полученные в § 4.2.

Подставим (6.1), (6.3) и (6.4) в уравнение системы (6.2):

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\} a \sin(\omega t + \varphi) = S(p) B \sin \omega t. \quad (6.5)$$

Используем символический метод определения периодического решения, подставив сюда $p = j\omega$, а вместо $\sin \omega t$ выражение $e^{j\omega t}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \{ Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a) + \\ + jq'(a)] \} a e^{j(\omega t + \varphi)} = \\ = S(j\omega) B e^{j\omega t}, \end{aligned}$$

или

$$Z(a) = B e^{-j\varphi}, \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} Z(a) = \\ = \frac{Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a) + jq'(a)]}{S(j\omega)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

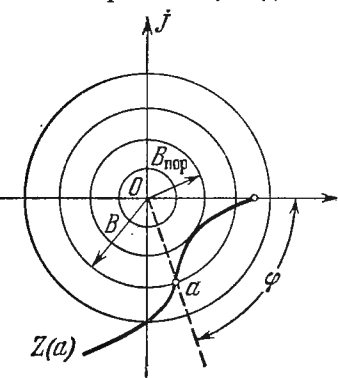


Рис. 6.2.

Уравнение (6.6) с двумя неизвестными a и φ можно решить графически, как показано на рис. 6.2. Правая часть (6.6) изображается в виде окружности радиуса B , а левая часть $Z(a)$ строится как кривая по точкам с переменным параметром a . Точки пересечения окружности с кривой $Z(a)$ дают решение, причем величина амплитуды вынужденных колебаний определяется в точке пересечения по отметкам на кривой Z , а фаза — по величине угла (рис. 6.2).

На рис. 6.2 окружности пересекают кривую только при радиусе, большем некоторого порогового значения $B > B_{\text{пор}}$. Следовательно, в этом случае одночастотные вынужденные колебания (6.3) возможны только при

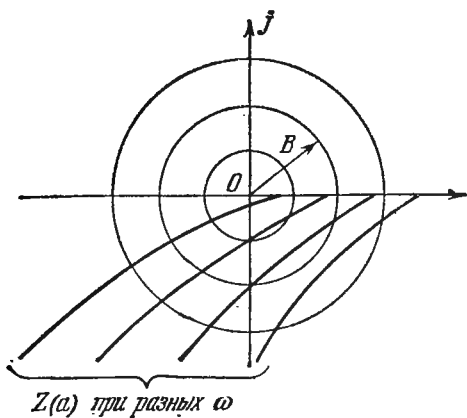


Рис. 6.3.

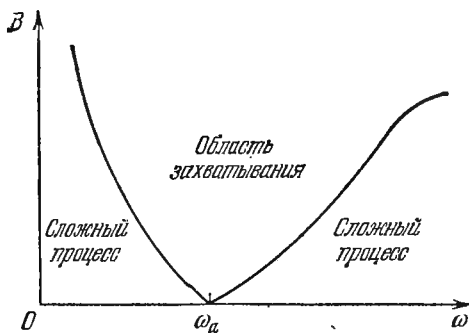


Рис. 6.4.

достаточно большой амплитуде B , а при меньшей амплитуде B внешнего воздействия будет иметь место сложное движение, включающее в себя и собственную частоту системы.

Построив серию кривых $Z(a)$ по формуле (6.7) для разных значений частоты внешнего воздействия ω

(рис. 6.3), можем построить график зависимости порогового значения B от частоты ω , например, в виде, изображенном на рис. 6.4, где ω_a — частота автоколебаний данной системы. Тогда мы получим область значений B и ω , в которой существуют одночастотные вынужденные колебания. Эта область называется *областью захватывания*. Явление захватывания состоит в том, что при

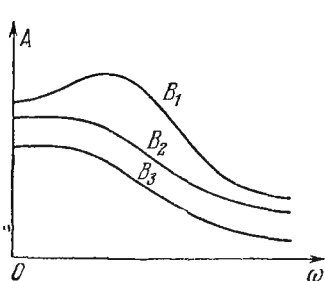


Рис. 6.5.

$B > B_{\text{пор}}$ собственные колебания (автоколебания) срываю-
тся и система переходит целиком на одночастотные вынужденные колебания с частотой внешнего воздействия. Строго говоря, эти одночастотные вынужденные колебания будут несинусоидальными. В соответствии со свойством фильтра линейной части (§ 4.1) они для переменной x будут только близки к синусоидальным (6.3). Об оп-

ределении высших гармоник этих колебаний см. [22].

На основании рис. 6.3 можно построить зависимости $a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, т. е. *частотные характеристики* замкнутой нелинейной системы по первой гармонике (6.3). В линейных системах частотные характеристики $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ не зависят от размера входной амплитуды и вычислялись для единичной амплитуды на входе. В нелинейной же системе характер частотных характеристик $A(\omega) = a(\omega)/B$ и $\varphi(\omega)$ может существенно зависеть от размера B . Поэтому для разных значений B получается серия частотных характеристик (рис. 6.5) замкнутой системы по первой гармонике.

Пример. Пусть уравнение системы имеет вид

$$\begin{aligned} &[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x + k F(x) = \\ &= (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p f(t), \end{aligned}$$

при гистерезисной нелинейности (рис. 6.6) и $f(t) = B \sin \omega t$. Тогда в уравнении (6.6), согласно (6.7), будем иметь

$$Z(a) = a \left\{ 1 - \frac{k [q(a) + j q'(a)]}{(T_1 + T_2) \omega - j \omega (1 - T_1 T_2 \omega^2)} \right\}.$$

Для заданной частоты $\omega = 10 \text{ сек}^{-1}$ и заданных параметров системы $k = 10$, $c = 10$, $b = 4$, $T_1 = 0,01$, $T_2 = 0,02$, кривая $Z(a)$ изображена на рис. 6.6, где от-

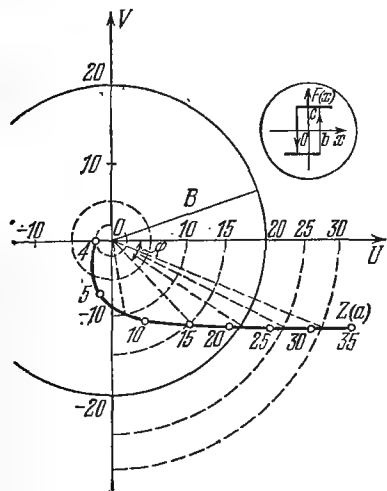


Рис. 6.6.

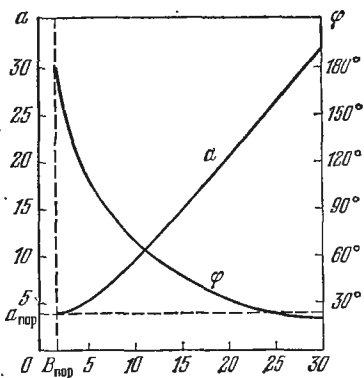


Рис. 6.7.

мечены значения a . Проведя окружности разных радиусов B , по точкам пересечения определим зависимости $a(B)$ и $\varphi(B)$ (рис. 6.7) для вынужденных колебаний при данной частоте.

§ 6.2. Процессы управления, сопровождающиеся вынужденными вибрациями

Рассмотрим случай, когда в системе при наличии переменного внешнего воздействия протекает некоторый процесс управления, а кроме того к системе приложено внешнее периодическое воздействие. Уравнение динамики системы (рис. 6.1) в этом случае получит вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t) + S_1(p)f_1(t), \quad (6.8)$$

где $f_1(t) = B \sin \omega t$, а $f(t)$ — медленное по сравнению с $f_1(t)$ воздействие, т. е. спектр возможных частот изме-

ния $f(t)$ много меньше ω . Решение будем искать в виде

$$x = x^0(t) + x^*(t), \quad x^* = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.9)$$

где $x^0(t)$ — тоже медленная по сравнению с $x^*(t)$ функция времени, определяющая процесс управления при наложенных на него вынужденных вибрациях x^* .

Полагая, что основной процесс управления $x^0(t)$ протекает настолько медленно, что за один период колебаний x^* можно приблизительно считать величину x^0 неизменной, используем прежние формулы гармонической линеаризации (4.15), а именно

$$F(x) = F^0(x^0, a) + \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] x^*, \quad (6.10)$$

где F^0 , q и q' вычисляются по формулам (4.16) и (4.17). Для некоторых конкретных нелинейностей эти функции приведены в § 4.2 (примеры 6—10).

Подставив (6.10) и (6.9) в уравнение (6.8), разобьем его на два. Для медленных составляющих (процесс управления) имеем

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0(x^0, a) = S(p)f(t), \quad (6.11)$$

а для вибрационных составляющих

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] \right\} x^* = S_1(p) B \sin \omega t. \quad (6.12)$$

Нетрудно видеть, что неизвестные x^0 и a могут быть определены только на основе совместного решения обоих уравнений. Если, решив уравнение (6.12), найти зависимость $a(x^0)$ и подставить ее в выражение $F^0(x^0, a)$, полученное по формуле (4.16), то найдем новую нелинейную функцию

$$\Phi(x^0) = F^0(x^0, a(x^0)). \quad (6.13)$$

Тогда уравнение для процесса управления (6.11) примет вид

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = S(p)f(t). \quad (6.14)$$

Оказывается, что нелинейная функция $\Phi(x^0)$ обладает тем свойством, что она имеет вид плавной кривой (рис. 6.8) для любых нелинейностей $F(x)$, в том числе релейных и гистерезисных. Поэтому эту функцию можно

линеаризовать обычным порядком, определив крутизну в начале координат (рис. 6.8):

$$\Phi = k_H x^0, \quad k_H = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0}. \quad (6.15)$$

Но согласно (6.13) имеем

$$\left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial a} \frac{da}{dx^0} \right)_{x^0=0}, \quad (6.16)$$

а согласно (4.16)

$$\left(\frac{\partial F^0}{\partial a} \right)_{x^0=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=a \sin \psi} \sin \psi d\psi = 0, \quad (6.17)$$

так как произведение четной функции на нечетную интегрируется за период. В соответствии с этим вместо (6.15) получаем важный результат:

$$k_H = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}. \quad (6.18)$$

Это значит, что для определения k_H не нужно находить зависимости $a(x^0)$ и строить новую нелинейную функцию $\Phi(x^0)$, а достаточно взять частную производную по x^0 от имеющегося для каждой нелинейности выражения $F^0(x^0, a)$.

С заменой (6.15) уравнение для процесса управления (6.14) принимает вид линейного уравнения

$$[Q(p) + k_H R(p)] x^0 = S(p) f(t), \quad (6.19)$$

где k_H — коэффициент усиления нелинейности в процессе управления, определяемый по формуле (6.18). Например, для идеальной релейной характеристики (см. § 4.2)

$$F(x) = c \operatorname{sign} x, \quad F^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a},$$

получим

$$k_H = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0} = \frac{2c}{\pi a c}, \quad (6.20)$$

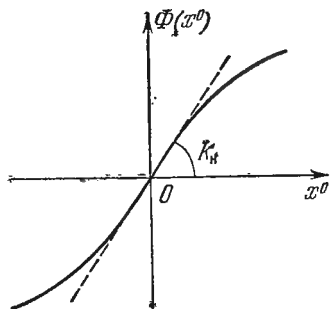


Рис. 6.8.

где a_c — амплитуда симметричных вынужденных колебаний в данной системе, найденных согласно § 6.1.

Для релейных характеристик с зоной нечувствительности и с петлей, дифференцируя (4.31), находим

$$k_H = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0} = \frac{2c}{\pi \sqrt{a_c^2 - b^2}}. \quad (6.21)$$

На рис. 6.9 представлена зависимость коэффициента k_H от амплитуды симметричных вынужденных колебаний.

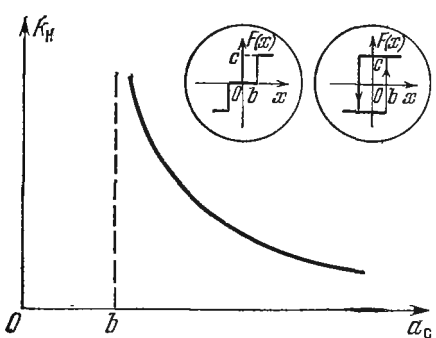


Рис. 6.9.

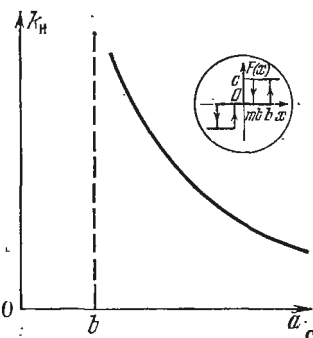


Рис. 6.10.

Аналогично для релейной характеристики общего вида (рис. 6.10) получаем

$$k_H = \frac{c}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a_c^2 - b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a_c^2 - m^2 b^2}} \right). \quad (6.22)$$

Для кусочно-линейной характеристики с зоной нечувствительности (рис. 6.11) имеем

$$k_H = k - \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_c}, \quad (6.23)$$

а для характеристики с насыщением (рис. 6.12)

$$k_H = \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{a_c} \quad (a_c \geq b). \quad (6.24)$$

Итак, пользуясь значениями коэффициента усиления k_H , мы можем определять процесс управления в нелинейной системе по линейному уравнению (6.19) на базе

линейной теории. Однако при этом надо учитывать, что коэффициент k_n имеет необычные свойства. В самом деле, как видно из формул (6.20) — (6.24), он зависит от амплитуды симметричных вынужденных колебаний a_c .

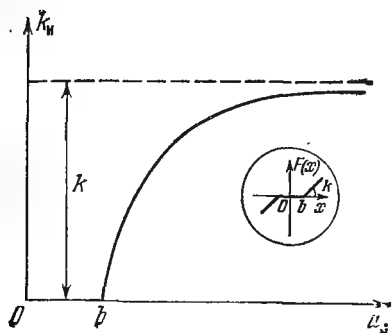


Рис. 6.11.

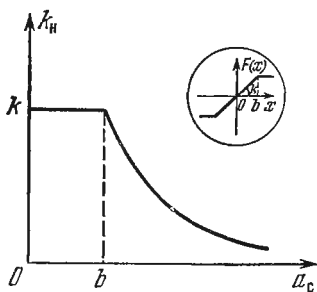


Рис. 6.12.

Эта амплитуда в свою очередь, согласно § 6.1, зависит от структуры и параметров линейной части системы (k_i , T_i) и еще, что очень важно, от амплитуды B и частоты ω внешнего вибрационного воздействия. Поэтому при синтезе системы (6.19), т. е. при выборе ее структуры и параметров надо знать зависимость

$$k_n(k_i, T_i), \quad (6.25)$$

а зная (или выбирая) внешнее вибрационное воздействие, надо учитывать также зависимость

$$k_n(B, \omega). \quad (6.26)$$

Итак, процесс управления при наложенных на него вынужденных вибрациях исследуется по линейному уравнению (6.19) без определения зависимости $a(x^0)$. Однако если все же необходимо определить величину амплитуды $a(x^0)$, то аналогично уравнению (6.5) решение уравнения (6.12) запишется в виде

$$Z(a, x^0) = Be^{-j\omega t},$$

где

$$Z(a, x^0) = \frac{Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a, x^0) + jq'(a, x^0)]}{S_1(j\omega)}.$$

Графическое решение получается, как показано на рис. 6.2, с той только разницей, что здесь строится серия кривых $Z(a)$ для разных значений x^0 . В результате на пересечениях этих кривых с окружностью радиуса B и определяется искомая зависимость $a(x^0)$. Тогда можно, согласно (6.15), найти и нелинейную функцию $\Phi(x^0)$, если необходимо учесть эту нелинейность в уравнении процесса управления (6.16).

В связи с изложенным на практике часто возникают следующие две важные частные задачи.

Задача 1. Вибрационное сглаживание и вибрационная линеаризация нелинейности при помощи вынужденных вибраций. Свойство плавности функции $\Phi(x^0)$ (рис. 6.8) как характеристики прохождения медленного сигнала в процессе управления $x^0(t)$ через нелинейное

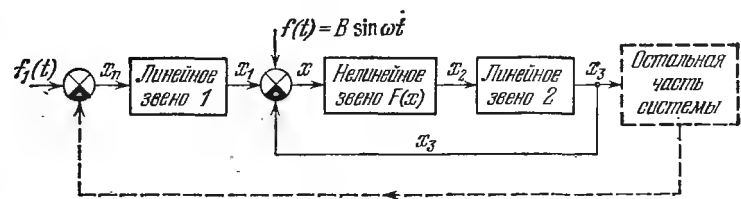


Рис. 6.13.

звено при любом очертании нелинейности $F(x)$, имеющей скачки и петли, называется *вибрационным сглаживанием нелинейности* для процесса управления при наличии вынужденных вибраций. Поскольку за счет этого возникает возможность обычной линеаризации полученной сглаженной характеристики (рис. 6.8) в виде $\Phi = k_x x^0$, то говорят также о *вибрационной линеаризации нелинейности*.

В технике вибрационное сглаживание применяют следующим образом. Непосредственно у входа нелинейного звена (например, релейного элемента), как показано на рис. 6.13, прикладывается внешнее вибрационное воздействие $f(t) = B \sin \omega t$ с частотой выше полосы пропускания линейного звена 2. Тогда вынужденные вибрации локализуются во внутренней части системы.

Сигнал на входе нелинейности имеет вид

$$x = x^0 + x^* = x_1 - x_3 + f(t),$$

причем

$$x^0 = x_1 - x_3, \quad x^* = f(t) = B \sin \omega t.$$

Отсюда следует, что амплитуда a_c и фаза φ симметричных вынужденных вибраций переменной x равны соответственно $a_c = B$, $\varphi = 0$.

Таким образом можно ликвидировать гистерезисную петлю или зону нечувствительности реле (рис. 6.9) и получить для сигнала управления, согласно (6.24), линейную характеристику с коэффициентом

$$k_H = \frac{2c}{\pi \sqrt{B^2 - b^2}}, \quad B > b,$$

или же ликвидировать зону нечувствительности (рис. 6.11), получив

$$k_H = k - \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{B}, \quad B > b.$$

Аналогично можно преобразовать сухое трение в трение, пропорциональное скорости, и т. п.

Величину k_H можно регулировать амплитудой B внешнего воздействия, не выводя ее, конечно, за допустимые пределы. Кроме того, амплитуда B должна быть во всяком случае больше максимально возможного значения сигнала x^0 , до которого хотят обеспечить линейность характеристики. Например, для петлевой релейной характеристики (рис. 6.9), согласно (4.31), должно быть $B \geq b + |x^0|$.

Задача 2. Вибрационная помехоустойчивость нелинейной системы управления. Пусть в уравнении нелинейной системы (6.8) $f_1(t) = B \sin \omega t$ представляет внешнюю вибрационную помеху (например, со стороны изгибных вибраций корпуса летательного аппарата, воспринимаемых гироскопом вместе с полезным сигналом по углу тангажа). Характеристическое уравнение системы для полезного сигнала в процессе управления, согласно (6.19), имеет вид

$$Q(\lambda) + k_H R(\lambda) = 0,$$

где коэффициент k_n зависит (см. (6.26)) от амплитуды B и частоты ω внешней вибрационной помехи. Следовательно, от этих параметров помехи будет зависеть качество процесса управления и даже устойчивость системы.

Таким образом, если устойчивость чисто линейной системы, как мы знаем, не зависит от внешнего воздействия, то в нелинейной системе устойчивость может

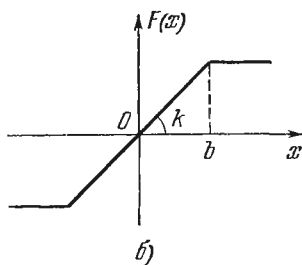
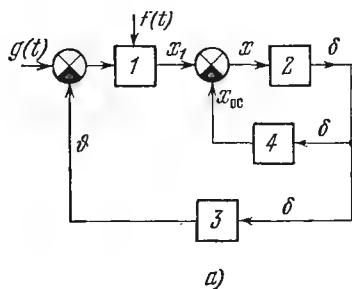


Рис. 6.14.

от него зависеть. Предельное значение амплитуды вибрационной помехи B , до которой система остается еще устойчивой, называется границей вибрационной помехоустойчивости системы.

В качестве примера определим вибрационную помехоустойчивость самолета с автопилотом. Схема системы изображена на рис. 6.14, а, где 1 — измерители, 2, 4 — привод с обратной связью, 3 — корпус самолета. Уравнение углового движения самолета по тангажу

$$(p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3) \vartheta = -k_0 (T_0 p + 1) \delta,$$

где ϑ — отклонение самолета по тангажу, δ — отклонение руля. Уравнение измерителей

$$x_1 = (k_1 + k_2 p) [\vartheta + f(t) - g(t)],$$

где $f(t) = B \sin \omega t$ — вибрационная помеха (например, измерение гироскопом изгибных вибраций корпуса самолета), $g(t)$ — медленное управляющее воздействие. Уравнение привода руля

$$(T p + 1) p \delta = F(x), \quad x = x_1 - k_{oc} \delta, \quad (6.27).$$

где $F(x)$ — нелинейное ограничение скорости привода (рис. 6.14, б).

Если $T = 0,08$ с, а частота вибраций $\omega = 100$ с⁻¹, амплитуда вынужденных вибраций на выходе привода руля будет ослаблена в 800 раз. Поэтому можно считать, что вибрации туда не проходят. Следовательно, амплитуду симметричных вынужденных колебаний на входе нелинейности x можно вычислить по формуле

$$a_c = B \sqrt{k_1^2 + k_2^2 \omega^2},$$

и для данной нелинейности (рис. 6.14, б), согласно (6.24), получаем

$$k_n = \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{B \sqrt{k_1^2 + k_2^2 \omega^2}}. \quad (6.28)$$

Уравнение привода руля для процесса управления вместо (6.27) примет вид

$$(Tp + 1)p\delta = k_n(x_1 - k_{oc}\delta).$$

Характеристическое уравнение всей системы для процесса управления будет иметь пятую степень:

$$a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0.$$

Предпоследний определитель Гурвица

$$\Delta_4 = (a_1a_2 - a_0a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_1a_4 - a_0a_5)^2$$

при некоторых числовых значениях параметров системы принимает вид

$$\Delta_4 = k_n^3 - 14,2k_n^2 + 6,51k_n.$$

График зависимости $\Delta_4(k_n)$ изображен на рис. 6.15, а. Условие устойчивости $\Delta_4 > 0$ выполняется при $k_n > 13,7$. Легко проверить, что при этом положительны и остальные определители Гурвица: их положительность сводится к положительности всех коэффициентов уравнения и неравенству $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$.

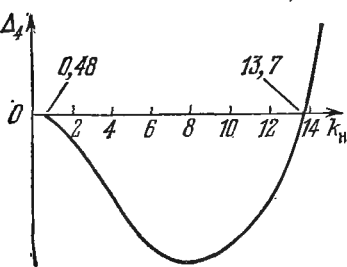
Из формулы (6.28) находим максимально допустимую амплитуду внешней вибрационной помехи по условию

устойчивости $k_n > 13,7$ в виде

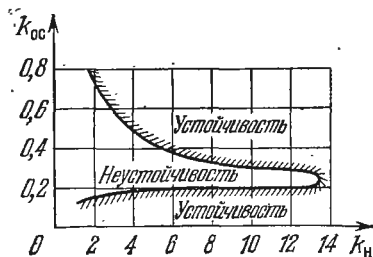
$$B_{\max} \approx \frac{b}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 \omega^2} \sin \frac{\pi k_{n \min}}{2k}} = 0,047,$$

где $b = 0,5$, $k_1 = 0,9$, $k_2 = 0,4$, $\omega = 100$, $k_{n \min} = 13,7$, $k = 80$.

Если при этом расчете системы надо выбрать, например, наилучший коэффициент обратной связи привода k_{oc} , то указанные вычисления надо провести для разных



а)



б)

Рис. 6.15.

значений k_{oc} , определяя каждый раз граничную величину $k_{n \min}$. Результаты такого расчета приведены в виде графика на рис. 6.15, б. Этот график дает границу помехоустойчивости системы по коэффициенту k_n , которую по вышенаписанной формуле легко пересчитать на допустимую амплитуду $B_{\max}$ внешней вибрационной помехи.

§ 6.3. Процессы управления в автоколебательных системах

Автоколебательные системы довольно часто встречаются среди систем автоматического управления и регулирования, в том числе системы с характеристиками релейного типа. Будем считать, что частота автоколебаний в рассматриваемых системах лежит много выше спектра возможных частот процесса управления. По-

этому будем искать решение для переменной x на входе нелинейности (рис. 6.1) в виде

$$x(t) = x^0(t) + x^*(t), \quad x^* = a \sin \psi, \quad \omega = \frac{d\psi}{dt}, \quad (6.29)$$

где $x^0(t)$ — медленная переменная по сравнению с $x^*(t)$.

Уравнение динамики системы (рис. 6.1) имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t), \quad (6.30)$$

где $f(t)$ — медленная функция времени (по сравнению с x^*). Гармоническую линеаризацию нелинейности произведем в предположении, что x^0 не успевает заметно измениться за период автоколебаний. Тогда, согласно (4.15),

$$F(x) = F^0(x^0, a) + \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] x^*. \quad (6.31)$$

Подставив (6.31) в уравнение системы (6.30), разобьем последнее, как и прежде, на два. Уравнение для медленных составляющих (т. е. для процесса управления) получит вид

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0(x^0, a) = S(p)f(t), \quad (6.32)$$

Уравнение для периодических составляющих запишется в виде

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] \right\} x^* = 0. \quad (6.33)$$

Три неизвестных функции $x^0(t)$, a и ω в искомом решении (6.29) определяются совместным решением уравнений (6.32) и (6.33). Поскольку эти функции взаимосвязаны, причем x^0 (процесс управления) меняется во времени, то амплитуда a и частота ω автоколебаний тоже будут медленно меняться во времени в процессе управления.

Будем рассуждать аналогично нашим рассуждениям в предыдущем параграфе. Если путем решения уравнения (6.33) найти зависимость $a(x^0)$ и подставить ее в выражение $F^0(x^0, a)$, полученное по формуле (4.16), то найдем новую нелинейную функцию

$$\Phi(x^0) = F^0(x^0, a(x^0)),$$

которая оказывается плавной кривой (рис. 6.8) для любых нелинейностей. Применяя к этой функции всю

прежнюю процедуру обычной линеаризации (6.17), (6.18), получим

$$\Phi = k_{\text{н}} x^0, \quad k_{\text{н}} = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}. \quad (6.34)$$

Для конкретных нелинейностей здесь будут справедливы прежние формулы (6.20) — (6.24) и графики (рис. 6.9 — 6.12), в которых, однако, в отличие от прежнего, величина a_c является *амплитудой симметричных автоколебаний*, определяемой для данной системы согласно § 4.3 или 4.4.

Таким образом, для нахождения коэффициента усиления нелинейности в процессе управления $k_{\text{н}}$ в автоколебательной системе нет необходимости искать зависимость $a(x^0)$ и строить новую нелинейную функцию $\Phi(x^0)$, а требуется знать лишь амплитуду симметричных автоколебаний a_c . В результате уравнение динамики процесса управления в автоколебательной системе вместо нелинейного (6.32) будет линейным:

$$[Q(p) + k_{\text{н}} R(p)] x^0 = S(p) f(t). \quad (6.35)$$

Однако коэффициент $k_{\text{н}}$ обладает особыми свойствами. Он, согласно (6.20) — (6.24), зависит от амплитуды a_c , а эта последняя, согласно § 4.3, определяется через параметры всей системы. Следовательно, $k_{\text{н}}$ зависит также и от структуры и параметров (k_i, T_i) линейной части системы, т. е.

$$k_{\text{н}}(k_i, T_i). \quad (6.36)$$

Эту особенность надо учитывать при синтезе системы с использованием линейной теории, а также при исследовании устойчивости и качества процессов управления.

Для определения амплитуды и частоты автоколебаний, которые накладываются на процесс управления, надо использовать уравнение (6.33). Оно полностью совпадает с уравнением (4.65) для несимметричных автоколебаний. Решается это уравнение в общем случае подстановкой $\lambda = j\omega$ в характеристическое уравнение

$$Q(\lambda) + R(\lambda) \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} \lambda \right] = 0;$$

после выполнения подстановки и выделения вещественной и мнимой частей получим два уравнения:

$$X(\omega, a, x^0) = 0, Y(\omega, a, x^0) = 0. \quad (6.37)$$

Отсюда определяются зависимости $a(x^0)$, $\omega(x^0)$, причем $x^0(t)$ — процесс управления, определяемый дифференциальным уравнением (6.35).

В случае, если нелинейность $F(x)$ является однозначной, это решение упрощается, так как частота автоколебаний ω в этом случае не зависит от величины x^0 и от формы нелинейности. Эта частота постоянна в процессе управления и определяется отдельно из уравнения (4.67):

$$X_Q(\omega) Y_R(\omega) - Y_Q(\omega) X_R(\omega) = 0, \quad (6.38)$$

а зависимость $a(x^0)$ определяется также отдельно из выражения

$$q(a, x^0) = \frac{-X_Q(\omega)}{X_R(\omega)}, \quad (6.39)$$

куда подставляется значение ω , найденное из (6.38).

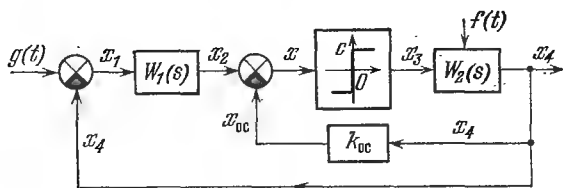


Рис. 6.16.

Пример. Рассмотрим систему с идеальной релейной характеристикой, схема которой приведена на рис. 6.16. Заданы

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{k_2}{s(T_2 s + 1)}, \quad F(x) = c \cdot \text{sign } x$$

и коэффициент жесткой обратной связи k_{oc} .

Общее уравнение динамики системы относительно переменной x запишется в виде

$$\begin{aligned} (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x + (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) k_2 F(x) = \\ = k_1 (T_2 p + 1) p g(t) - (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc}) f(t). \end{aligned}$$

Для подстановки в уравнение (6.38) здесь имеем

$$X_q = -(T_1 + T_2)\omega^2, \quad Y_q = \omega - T_1 T_2 \omega^3,$$

$$X_R = k_2(k_1 + k_{oc}), \quad Y_R = k_2 k_{oc} T_1.$$

Поэтому, согласно (6.38), получаем значение частоты автоколебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_{oc}}{T_1(T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}}. \quad (6.40)$$

Гармоническая линеаризация нелинейности дает

$$F(x) = F^0(x^0, a) + q(a, x^0)x^*,$$

где, согласно (4.33),

$$F^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a}, \quad q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}. \quad (6.41)$$

Коэффициент усиления нелинейности в процессе управления k_H , согласно (6.20), вычисляется в виде

$$k_H = \frac{2c}{\pi a_c},$$

где a_c — амплитуда симметричных автоколебаний в данной системе.

Из формул (6.39) и (6.41) при $x^0 = 0$ получаем

$$\frac{4c}{\pi a_c} = \frac{(T_1 + T_2)\omega^2}{k_2(k_1 + k_{oc})},$$

откуда с подстановкой (6.40) находим

$$a_c = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}{\pi (T_1 + T_2)}. \quad (6.42)$$

Следовательно,

$$k_H = \frac{T_1 + T_2}{2k_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}. \quad (6.43)$$

Итак, общее уравнение динамики системы относительно переменной x для процесса управления принимает вид

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc})k_2 k_H]x^0 = \\ = k_1 (T_2 p^2 + p)g(t) - (k_{oc} T_1 p + k_1 + k_{oc})f(t),$$

где коэффициент k_n выражается через другие параметры системы формулой (6.43). Дальше эту систему можно рассчитывать как обыкновенную линейную, определяя устойчивость и качество процесса управления с соответствующим выбором параметров, учитывая выражение для k_n (6.43). Здесь нужно еще иметь в виду ограниченность возможного интервала линеаризации процесса управления, так как из (6.41), например, следует требование $x^0 < a$. Отсюда вытекают требования на соотношение параметров системы в соответствии с формулой для амплитуды (6.42).

Для того чтобы определить амплитуду автоколебаний, наложенных на процесс управления, надо воспользоваться формулой (6.39), которая с подстановкой ω (6.40) и q (6.41) дает

$$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2} = \frac{T_1 + T_2}{k_2 T_1 (T_2 k_1 + T_1 k_{oc})},$$

откуда определяется зависимость $a(x^0)$ в процессе управления.

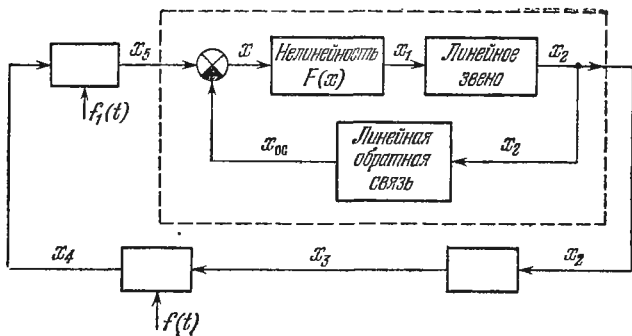


Рис. 6.17.

Рассмотрим и здесь те же две специфические частные задачи, которые рассматривались выше при вынужденных вибрациях.

Задача 1. Вибрационное сглаживание и вибрационная линеаризация нелинейности при помощи автоколебаний. Мы видели, что за счет автоколебательных вибраций в

автоматической системе любая нелинейная характеристика, в том числе скачкообразная и гистерезисная, становится плавной кривой $\Phi(x^0)$, как и прежде (рис. 6.8). Это и называется вибрационным сглаживанием нелинейности, а замена $\Phi^0 = k_n x^0$ — вибрационной линеаризацией нелинейности для сигнала управления при помощи автоколебаний.

Для реализации этого свойства в системе вокруг нелинейного звена организуется внутренний автоколебательный контур (рис. 6.17). Параметры его выбираются так, чтобы частота автоколебаний была достаточно высокой и не пропускалась остальными звеньями системы (за пределами этого контура) и чтобы амплитуда автоколебаний была не меньше возможных значений медленной составляющей x^0 на входе нелинейности x (рис. 6.17).

Далее вычисляется амплитуда a_c симметричных (т. е. при $x^0 = 0$) автоколебаний этого контура, взятого отдельно. Затем через величину a_c определяется значение k_n для данной нелинейности. После этого процесс управления во всей системе в целом исследуется и рассчитывается как в чисто линейной с заменой нелинейности $F(x)$ на $k_n x^0$.

Задача 2. Влияние автоколебательных вибрационных помех на устойчивость и качество процесса управления. Наряду со специальным использованием автоколебаний, изложенным в задаче 1, могут быть случаи их вредного влияния вплоть до нарушения устойчивости процесса управления. Это влияние совершенно аналогично действию внешних вибрационных помех (§ 6.2).

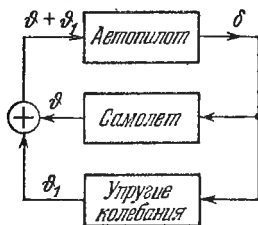
Обратимся к той же задаче учета упругих вибраций корпуса самолета в полете, как и при исследовании вибрационной помехоустойчивости в предыдущем параграфе. Там эти вибрации считались поступающими на гироскоп извне. Строго же говоря, они имеют место внутри системы, как показано на рис. 6.18, а, где автопилот и самолет составляют прежний контур управления, в котором рассматривается движение самолета как твердого тела. Но теперь параллельно ему подключен еще контур упругих колебаний корпуса с уравнением

$$(p^2 + bp + c^2)\vartheta_1 = k_1\delta, \quad (6.44)$$

где ϑ_1 — угол отклонения при изгибе оси самолета в точ-

не установившего гироскопа. Изгибные вибрации при таком рассмотрении являются автоколебательными.

Чтобы определить коэффициент усиления k_n нелинейности $F(x)$ автопилота в процессе управления, нужно найти сначала амплитуду симметричных изгибных коле-



а)



б)

Рис. 6.18.

баний a_c . Поскольку они не проходят через звено «самолет как твердое тело», то для определения a_c рассчитываются автоколебания в отдельном контуре (рис. 6.18, б). Затем полученное значение a_c используется при определении k_n , после чего система самолет — автопилот исследуется как линейная с учетом выражения k_n через другие параметры системы (см. пример, приводившийся выше). Заметим, что поскольку коэффициент демпфирования в уравнении (6.44) мал, то частота автоколебаний будет близка к значению c в уравнении (6.44). Это и давало возможность рассматривать в предыдущем параграфе прохождение автоколебаний через автопилот как прохождение вынужденных колебаний с заданной извне частотой.

§ 6.4. Колебательные переходные процессы

Рассмотрим определение качества колебательных переходных процессов в нелинейных системах (рис. 6.19). Эти процессы могут быть затухающими до нуля или до амплитуды автоколебаний и расходящимися изнутри до амплитуды автоколебаний, или же расходящимися неограниченно в случае неустойчивости.

Будем рассматривать их как собственные колебания при отсутствии внешних воздействий во время самого

процесса. Уравнение нелинейной системы (рис. 6.20), как известно, имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = 0. \quad (6.45)$$

В линейных системах синусоидальные переходные колебания имели вид

$$x = a(t) \sin \omega t, \quad a(t) = a_0 e^{\xi t}. \quad (6.46)$$

Для линейной системы высокого порядка такое решение является приближенным в том смысле, что оно соответствует одной паре комплексных корней характеристического уравнения системы. Чтобы

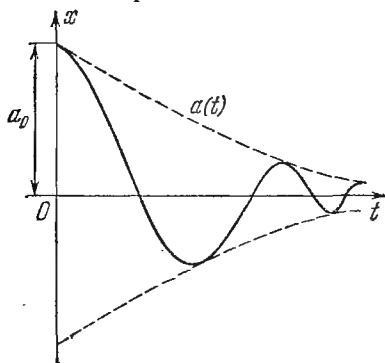


Рис. 6.19.



Рис. 6.20.

это решение отвечало основной части переходного процесса, эта пара корней должна быть ближайшей к мнимой оси.

В нелинейных системах, удовлетворяющих свойству фильтра (см. § 4.1), будем считать переходные колебания близкими к синусоидальным (6.46), полагая, однако, что показатель затухания ξ и частота ω медленно изменяются с изменением амплитуды колебаний a в ходе процесса. Сама амплитуда $a(t)$ может меняться быстро вплоть до затухания за один-два периода.

Тогда решение вместо (6.46) надо искать в виде

$$x = a(t) \sin \psi(t), \quad \frac{da}{dt} = a\xi(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(a). \quad (6.47)$$

Как частный случай отсюда при $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ получается формула (6.46) для линейных систем.

При $\xi < 0$ колебания затухают, при $\xi > 0$ — расходятся.

Гармоническая линеаризация нелинейности здесь изменится, поскольку из (6.47) имеем

$$x = a \sin \psi, \quad px = a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi.$$

Отсюда

$$\sin \psi = \frac{x}{a}, \quad \cos \psi = \frac{p - \xi}{a\omega} x.$$

В связи с этим первая гармоника колебаний на выходе нелинейности вместо прежнего (4.10) получит выражение

$$F(x) = \left[q(a) + q'(a) \frac{p - \xi}{\omega} \right] x, \quad (6.48)$$

где коэффициенты гармонической линеаризации q и q' определяются, как и раньше, формулами (4.11). Поэтому здесь для конкретных нелинейностей можно пользоваться результатами, полученными в § 4.2.

Затухающие или расходящиеся колебания в линейной системе соответствуют комплексным корням характеристического уравнения. Следовательно, для их определения нужно в характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы (вытекающее из (6.45) и (6.48))

$$Q(\lambda) + R(\lambda) \left[q(a) + q'(a) \frac{\lambda - \xi}{\omega} \right] = 0$$

подставлять $\lambda = \xi + j\omega$, полагая, что это соответствует ближайшей к мнимой оси паре комплексных корней. В результате получим

$$Q(\xi + j\omega) + R(\xi + j\omega) [q(a) + jq'(a)] = 0. \quad (6.49)$$

В это комплексное уравнение входят неизвестные величины ξ , ω , a . Следовательно, из этого уравнения можно найти две из них как функцию третьей:

$$\xi(a) \quad \text{и} \quad \omega(a). \quad (6.50)$$

Этого достаточно, чтобы затем по формулам (6.47) приблизительно определить и кривую переходных колебаний $x(t)$.

В большинстве случаев при проектировании системы автоматического управления и регулирования не требует-

ся вычерчивать кривую переходного процесса. Нужна лишь оценка быстроты затухания и частоты колебаний, т. е. для оценки качества переходного колебательного процесса в большинстве случаев можно ограничиться определением зависимостей $\xi(a)$ и $\omega(a)$ из уравнения (6.49).

Один из способов определения этих зависимостей состоит в следующем (другие способы описаны в [22]). Выделив в уравнении (6.49) вещественную и мнимую части, получим два уравнения

$$X(a, \omega, \xi) = 0, \quad Y(a, \omega, \xi) = 0, \quad (6.51)$$

из которых и определяются зависимости (6.50).

Если нужно выбирать какой-либо параметр системы, например коэффициент усиления линейной части k_n , так,

чтобы ξ и ω удовлетворяли заданным требованиям, то можно пользоваться так называемыми *диаграммами качества*. Они строятся следующим образом. Пусть в какой-либо системе мы определили зависимость амплитуды автоколебаний a_n от параметра k_n , как показано на рис. 6.21. Здесь по параметру k_n выделена область устойчивости равновесного состояния. В автоколебательном режиме имеем $a = a_n = \text{const}$, т. е. $\xi = 0$. Ниже линии AB

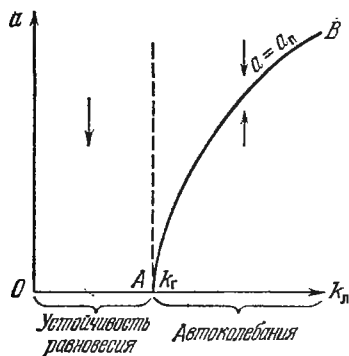


Рис. 6.21.

(рис. 6.21) колебания расходятся. Следовательно, там $\xi > 0$. Выше линии AB колебания затухают и, значит, там $\xi < 0$. На самой линии AB имеем $\xi = 0$.

Если на основании уравнений (6.51) провести линии равных значений ξ , то получится диаграмма, изображенная на рис. 6.22. Взяв некоторое значение $k_n = k_1$ в области устойчивости равновесия, получим (идя по вертикали) зависимость $\xi(a)$, показанную на рис. 6.23, а. Для значения же $k_n = k_2$ в области автоколебаний (рис. 6.22) зависимость $\xi(a)$ будет иметь иной вид (рис. 6.23, б). Эти графики дают представление о качестве

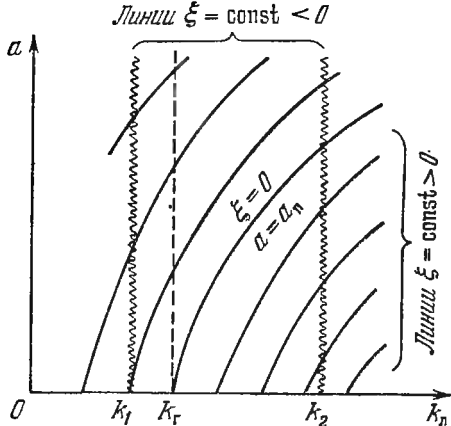
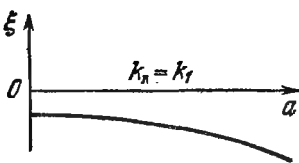
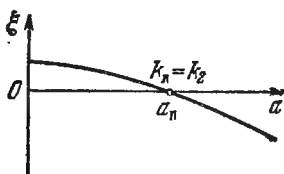


Рис. 6.22.



a)



б)

Рис. 6.23.

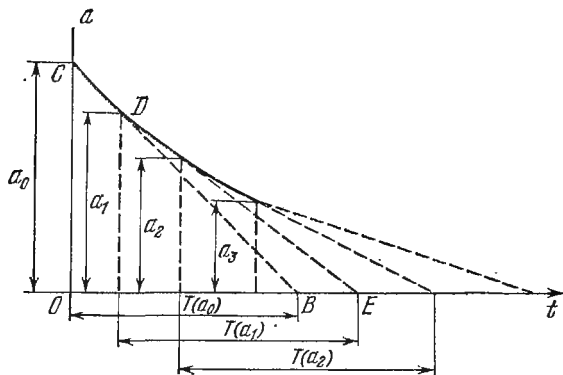


Рис. 6.24.

затухания колебательных переходных процессов при разных значениях параметра k_d .

Можно найти огибающую переходного колебательного процесса $a(t)$ во всех этих случаях (рис. 6.24), согласно (6.47), по формуле

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a\xi(a)} = t. \quad (6.52)$$

Интегрирование (6.52) в конечной форме возможно лишь в простейших случаях. Поэтому приведем графический способ построения огибающей $a(t)$. Введем в рассмотрение текущую «постоянную времени»

$$T(a) = -\frac{1}{\xi(a)}. \quad (6.53)$$

В обыкновенных линейных системах $T = \text{const}$. Здесь же T медленно изменяется с изменением амплитуды. Значения $T(a)$, согласно формуле (6.53), берутся из диаграммы качества (рис. 6.22) для каждого значения a при задан-

ном k_d . Считая $T = \text{const}$ на небольшом промежутке времени, производим графическое построение огибающей $a(t)$ указанным на рис. 6.24 способом. Он настолько прост, что не требует дополнительных к рисунку разъяснений.

Для наглядного представления об изменениях частоты переходных колебаний можно, используя уравнения (6.51), на той же плоскости (k_d, a) построить линии равных значений частоты ω (рис. 6.25).

Приведем пример построения диаграмм качества нелинейных колебательных переходных процессов для системы, показанной на рис. 6.26, где

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{k_2}{s(T_2 s + 1)}.$$

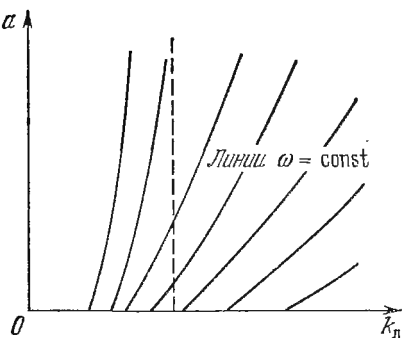


Рис. 6.25.

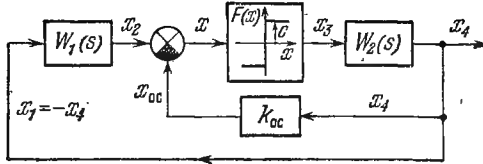


Рис. 6.26.

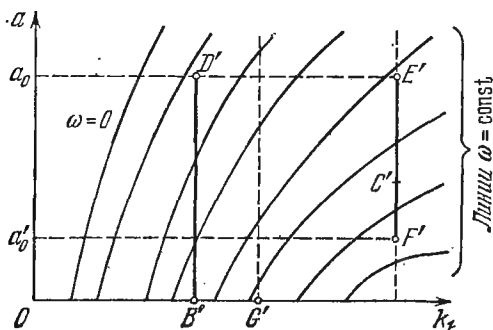
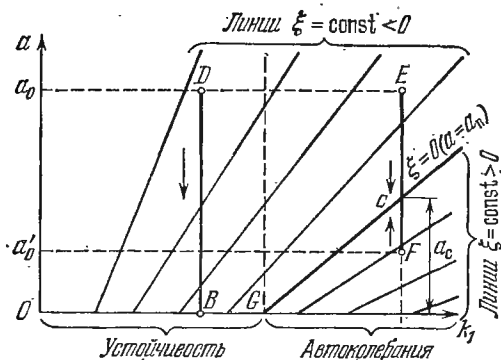


Рис. 6.27.

Гармоническая линеаризация нелинейности дает

$$F(x) = q(a)x, \quad q = \frac{4c}{\pi a}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы в ре-

зультате получает вид

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + [1 + T_1 k_2 k_{oc} q(a)] \lambda + (k_1 + k_{oc}) k_2 q(a) = 0.$$

Подставляя в это уравнение $\lambda = \xi + j\omega$, ищем решение в форме (6.47). Выделив вещественную и мнимую части,

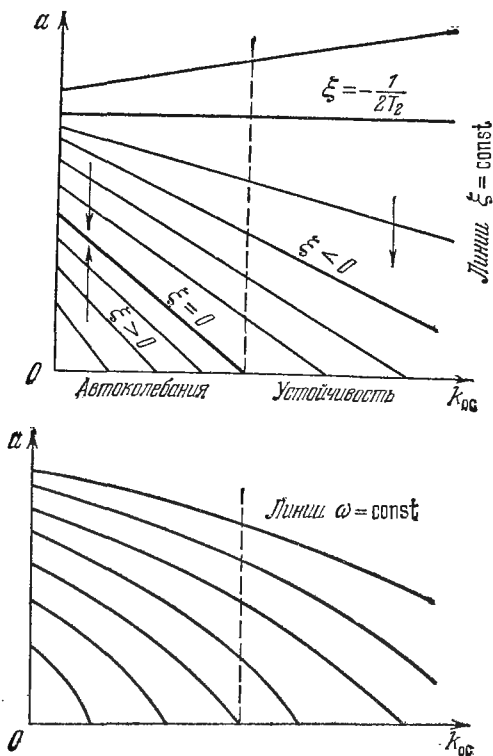


Рис. 6.28.

получим два уравнения (6.51) в виде

$$\begin{aligned} T_1 T_2 \xi^3 + (T_1 + T_2) \xi^2 + [1 + T_1 k_2 k_{oc} q(a)] \xi + \\ + (k_1 + k_{oc}) k_2 q(a) - (3T_1 T_2 \xi + T_1 + T_2) \omega = 0, \\ 3T_1 T_2 \xi^2 + 2(T_1 + T_2) \xi + 1 + T_1 k_2 k_{oc} q(a) - T_1 T_2 \omega^2 = 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения с учетом значения $q(a)$ находим

$$\omega^2 = 3\xi^2 + 2 \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \xi + \frac{1}{T_1 T_2} + \frac{4ck_2 k_{oc}}{\pi T_2^2 a}, \quad (6.54)$$

а из первого

$$a = \frac{4ck_2}{\pi f(\xi)} \left[k_1 - T_1 k_{oc} \left(\frac{1}{T_2} + 2\xi \right) \right], \quad (6.55)$$

где

$$f(\xi) =$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 2 \left[1 + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \right] \xi + 8(T_1 + T_2) \xi^2 + 8T_1 T_2 \xi^3.$$

По формулам (6.54) и (6.55) построены диаграммы качества нелинейных колебательных переходных процессов в виде линий $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ по параметру k_1

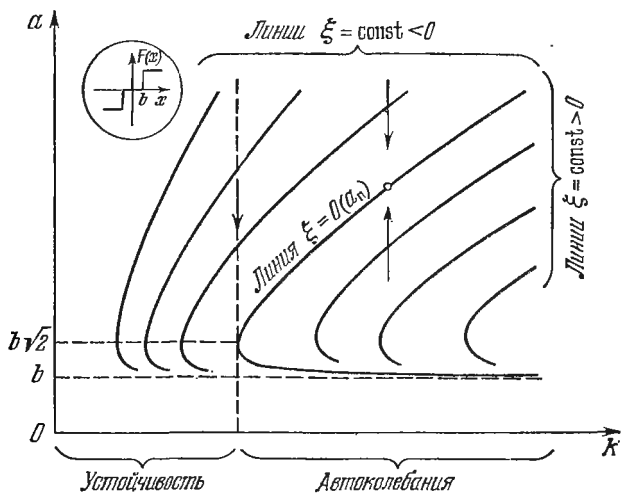


Рис. 6.29.

на рис. 6.27 и по параметру k_{oc} — на рис. 6.28. Линии $\xi = 0$ на обеих диаграммах соответствуют амплитуде автоколебаний. В области автоколебаний, как видно из диаграммы качества, например по линии FC (рис. 6.27), переходные процессы расходятся ($\xi \geq 0$) от состояния

равновесия ($a = 0$) до амплитуды a_c и затухают при больших начальных амплитудах ($\xi < 0$), например по отрезку EC . В области же устойчивости (см., например, отрезок DB) колебания при любых начальных амплитудах затухают ($\xi < 0$). Изменение частоты колебаний при этом показывают отрезки $E'F'$ и $D'B'$. Левее линии $\omega = 0$ процессы аperiodические.

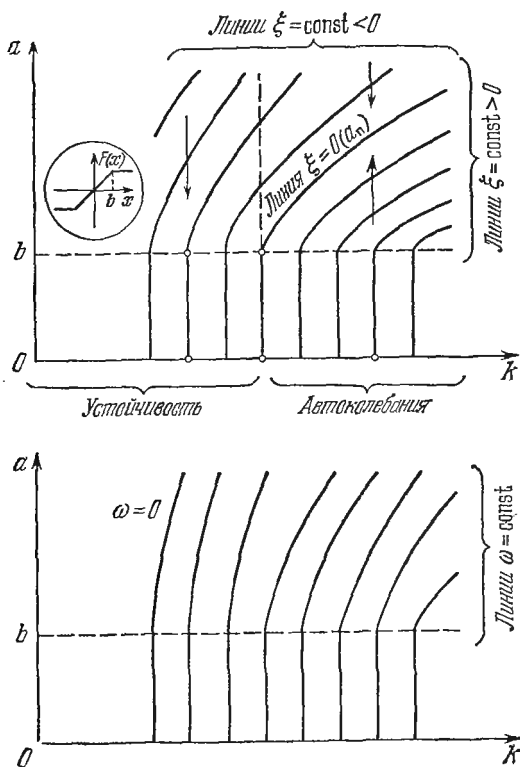


Рис. 6.30.

На рис. 6.29 и 6.30 приведены диаграммы качества, характерные для других видов полинейностей. Важно отметить, что в случае нелинейной системы такие диаграммы имели бы вид вертикальных прямых, так как

ξ и ω там не зависят от амплитуды. Это и видно на рис. 6.30 в зоне линейности, где $a < b$.

Укажем еще другой способ оценки быстроты затухания переходных процессов в нелинейной системе с одной однозначной нелинейностью $F(x)$ (рис. 6.31). Передаточная функция линейной части имеет вид

$$W_n(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}.$$

Нелинейная характеристика $F(x)$ расположена в секторе $[0, k_m]$ (рис. 6.31, б) и может иметь произвольное очертание. Данный способ оценки быстроты затухания

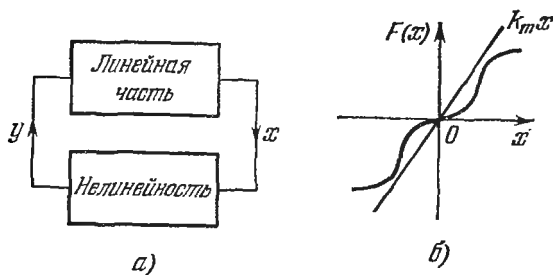


Рис. 6.31.

переходных процессов основан на применении частотного критерия абсолютной устойчивости (§ 5.5). На комплексной плоскости вместо модифицированной (5.48) строится *смещенная частотная характеристика*, определяемая следующим образом:

$$W_{cm}(j\omega - |\xi|) = U_{cm}(\omega, \xi) + jV_{cm}(\omega, \xi), \quad (6.56)$$

где

$$U_{cm}(\omega, \xi) = \operatorname{Re} W_n(j\omega - |\xi|),$$

$$V_{cm}(\omega, \xi) = \omega \operatorname{Im} W_n(j\omega - |\xi|).$$

Основываясь на формулировке критерия абсолютной устойчивости (§ 5.5), можно оценить быстроту затухания переходного процесса в системе следующим образом: *нелинейная система с устойчивой линейной частью и нелинейной характеристикой, расположенной внутри сектора $[0, k_m]$, будет обладать показателем затухания, не меньшим данного $|\xi|$, если через точку $-1/k_m$ мож-*

но провести прямую с любым наклоном так, что она не пересечет смещенной характеристики $W_{cm}(\omega, \xi)$. Эта оценка проиллюстрирована на рис. 6.32.

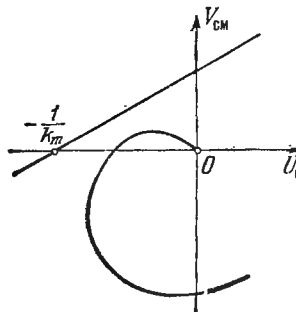


Рис. 6.32.

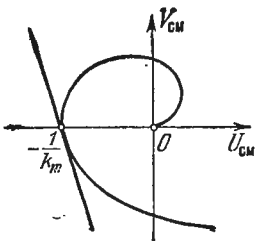


Рис. 6.33.

Можно определить предельное значение k_m , при котором в системе имеет место показатель затухания, не меньше $|\xi|$, как показано на рис. 6.33.

Если построить серию смещенных частотных характеристик для разных значений ξ , то получим зависимость $\xi(k_m)$, т. е. зависимость показателя затухания от размера сектора, в котором лежит нелинейная характеристика.

§ 7.1. Линейная коррекция нелинейных систем

В этой главе рассматривается задача синтеза нелинейных систем не в смысле оптимизации, а как задача введения в заданную систему дополнительных устройств (корректирующих) для удовлетворения предъявляемым к системе техническим требованиям.

Для достижения требуемой точности и качества процесса в нелинейные системы можно вводить линейные корректирующие устройства такие же, как и в линейных системах (см. [23], гл. 6). Эти линейные корректирующие устройства могут быть последовательными (с введением производных, интегралов и т. п.) и параллельными (в виде местных обратных связей различного типа).

Рассмотрим системы с одной нечетно-симметричной однозначной нелинейностью $F(x)$, гармоническая линеаризация которой имеет вид

$$F(x) = q(a)x, \quad (7.1)$$

где коэффициент гармонической линеаризации принимает ограниченные значения

$$0 \leq q(a) \leq q_m \quad \text{или} \quad q_n \leq q(a) \leq q_m. \quad (7.2)$$

К такого типа нелинейностям относятся, например, нелинейности, изображенные на рис. 1.1, а, б, г, д, е и рис. 1.2, б, в. Более сложные случаи рассматриваются в книге [19].

Случаи наличия нелинейностей вида рис. 1.2, а и рис. 1.5, а, когда коэффициент $q(a)$ принимает бесконечное значение при $a = 0$, здесь не рассматриваются, так как в этих случаях невозможно обеспечить устойчивое равновесное состояние системы в нулевой точке и установившийся режим будет автоколебательным. В этих случаях путем введения линейных корректирующих уст-

роЙств можно добиваться приемлемых значений параметров (a , ω) автоколебаний. Но это следует делать с помощью методов расчета автоколебаний, изложенных выше в главе 4. Здесь мы будем рассматривать точность и качество процессов *около устойчивого равновесного состояния в нулевой точке*.

Пусть схема системы имеет вид, изображенный на рис. 7.1. Положим, что линейное корректирующее устройство любого типа вводится в одну из линейных ча-

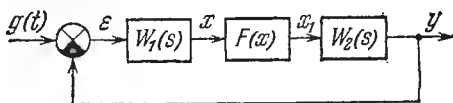


Рис. 7.1.

стей, т. е. в блок $W_1(s)$ или $W_2(s)$, не охватывая нелинейного звена $F(x)$. Условимся в формуле гармонической линеаризации (7.1) записывать

$$q(a) = kq_0(a), \quad (7.3)$$

где k — коэффициент усиления (его определение для различных нелинейностей показано на рис. 1.1). Тогда выражение $q_0(a)$ можно получить, согласно § 4.2, в виде

$$q_0(a) = \frac{1}{k} q(a).$$

Например, для кубической нелинейности из (4.22) имеем

$$q_0(a) = 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2}{b^2},$$

а для характеристики с насыщением (рис. 4.8, в), согласно (4.28), получаем

$$q_0(a) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right).$$

Указанный в формуле (7.3) коэффициент k будем относить к передаточной функции линейной части системы. Так, для схемы рис. 7.1 передаточную функцию

такой приведенной линейной части будем записывать в виде

$$W_{\text{пл}}(s) = kW_{\text{л}}(s) = kW_1(s)W_2(s), \quad (7.4)$$

где k — коэффициент, выделенный из нелинейности согласно (7.3).

Соответственно в случае релейной характеристики (рис. 1.2, в) в качестве величины k примем значение q_{max} , т. е.

$$k = \frac{2c}{\pi b}. \quad (7.5)$$

В этом случае, согласно формулам (7.3), (7.5) и (4.23), получим

$$q_0(a) = \frac{2b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (7.6)$$

Величину $q_0(a)$ будем называть *нормированным коэффициентом гармонической линеаризации*. Тогда синтез корректирующего устройства можно производить следующим образом.

1. Строится логарифмическая амплитудная частотная характеристика первоначально заданной приведенной линейной части системы:

$$W_{\text{пл}}(s) = kW_1(s)W_2(s),$$

где k — коэффициент усиления, перенесенный из нелинейности.

2. Формируется желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика линейной части $W_{\text{ж}}(s)$ в соответствии с требованиями точности и качества процессов, как это изложено в теории линейных систем (см. [23], гл. 6).

3. Синтезируется линейное корректирующее устройство также методом линейной теории.

4. Вычерчивается логарифмическая фазовая частотная характеристика полученной скорректированной линейной части системы.

В дополнение ко всем этим операциям, выполняемым по линейной теории, добавляется еще один пункт, учитывающий нелинейность $F(x)$ в нормированном виде.

5. Для данной нелинейности с использованием нормированного коэффициента $q_0(a)$ строится «запретная» зо-

на, соответствующая желаемому показателю колебательности M . Внутрь этой зоны не должна заходить фазовая частотная характеристика скорректированной линейной части системы. Та кривая $M = \text{const}$, которой касается полученная фазовая характеристика, определяет значение показателя колебательности данной скорректированной системы. Если необходимо его уменьшить, то нужно несколько изменить параметры полученного выше линейного корректирующего устройства, следя за тем, чтобы не допускать существенного искажения желаемых свойств логарифмической амплитудной частотной характеристики приведенной линейной части, положенных первоначально в основу расчета.

Этот пятый пункт процедуры синтеза в совокупности с предыдущими обеспечивает нужные качества процессов в замкнутой нелинейной системе в целом. Следовательно, прежде чем приступать к синтезу линейного корректирующего устройства в нелинейной системе, необходимо научиться строить запретную зону по показателю колебательности при заданной нелинейности. Такое построение может производиться методом гармонической линеаризации, поскольку речь идет о колебательных переходных процессах.

Рассмотрим методику этого построения. Ограничиваясь рассмотрением однозначных нелинейностей (7.1) с ограниченными значениями коэффициента гармонической линеаризации (7.2) и используя его нормирование (7.3), получим следующее выражение для передаточной функции разомкнутой цепи гармонически линеаризованной системы:

$$W(s, a) = W_{\pi}(s) k q_0(a) = q_0(a) W_{\pi\pi}(s).$$

Передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$\Phi(s, a) = \frac{W(s, a)}{1 + W(s, a)} = \frac{q_0(a) W_{\pi\pi}(s)}{1 + q_0(a) W_{\pi\pi}(s)}.$$

Выделим вещественные и мнимые части после замены $s = j\omega$, обозначив их следующим образом:

$$W_{\pi\pi}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Тогда для показателя колебательности $M = |\Phi(j\omega, a)|$

имеем выражение

$$M = \frac{q_0 \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1 + q_0 U)^2 + (q_0 V)^2}}.$$

Отсюда после преобразования получаем уравнение линий равных значений M на комплексной плоскости (U, V) в виде

$$(U - U_0)^2 + V^2 = R^2, \quad (7.7)$$

где

$$U_0 = -\frac{M^2}{q_0(M^2 - 1)}, \quad R = \frac{M}{q_0(M^2 - 1)}. \quad (7.8)$$

При определенном значении q_0 линии $M = \text{const}$ получают вид окружностей. Но согласно (7.2) и (7.3) величина q_0 может принимать любое значение в интервале

$$0 \leq q_0(a) \leq q_{0m} \quad \text{или} \quad q_{0н} \leq q_0(a) \leq q_{0m}, \quad (7.9)$$

где числа $q_{0н}$ и q_{0m} получают свои определенные значения для каждой конкретной нелинейности. В соответствии с этим, согласно (7.8), координата центра окружности U_0 и радиус R будут тоже меняться в определенных

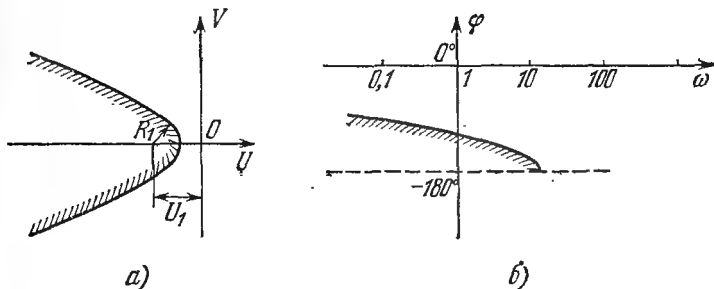


Рис. 7.2.

для каждой нелинейности пределах. Следовательно, каждая линия $M = \text{const}$ будет определяться как огибающая непрерывного множества постепенно меняющихся окружностей. При этом в случае первого неравенства (7.9) линия $M = \text{const}$ будет незамкнутой (рис. 7.2, а), так как в начальной точке $q_0 = 0$ из (7.8) имеем $U_0 = \infty$, $R = \infty$. Показанные на рис. 7.2, а величины R_1 и U_1 ,

согласно (7.8), определяются выражениями

$$R_1 = \frac{M}{q_{0m}(M^2 - 1)}, \quad U_1 = -\frac{M^2}{q_{0m}(M^2 - 1)}. \quad (7.10)$$

В случае второго неравенства (7.9) линия $M = \text{const}$ будет замкнутой (рис. 7.3, а), причем

$$R_2 = \frac{M}{q_{0н}(M^2 - 1)}, \quad U_2 = -\frac{M^2}{q_{0н}(M^2 - 1)}, \quad (7.11)$$

а значения R_1 и U_1 прежние.

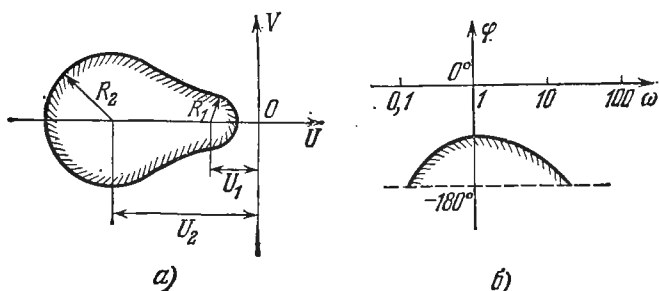


Рис. 7.3.

Поскольку синтез линейного корректирующего устройства проводится по логарифмическим частотным характеристикам, то изображенные на рис. 7.2, а и рис. 7.3, а линии $M = \text{const}$ (запретные зоны) должны быть перенесены в систему координат логарифмических характеристик. Это показано соответственно на рис. 7.2, б и рис. 7.3, б.

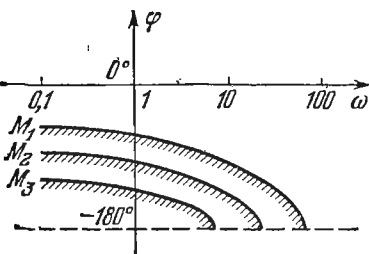


Рис. 7.4.

Взяв разные постоянные значения $M (M_1, M_2, M_3, \dots)$, получим серию кривых $M = \text{const}$ (рис. 7.4).

Логарифмические частотные характеристики скорректированной по изложенной выше процедуре системы должны быть такими, чтобы фазовая характеристика линейной

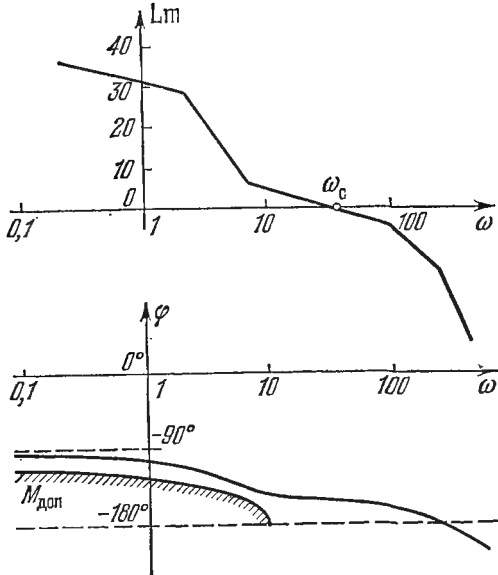


Рис. 7.5.

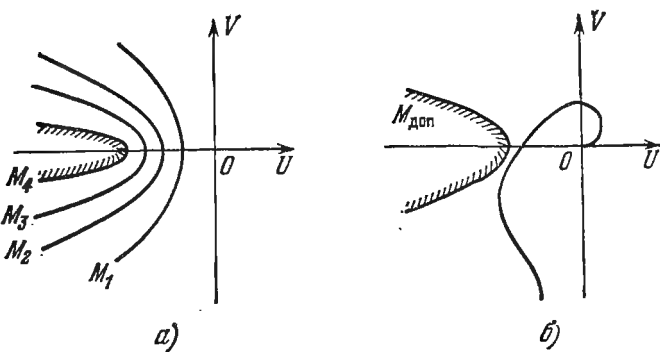


Рис. 7.6.

части $\varphi(\omega)$ не заходила внутрь запретной зоны, определяемой допустимым значением показателя колебательности M (рис. 7.5).

Если расчет корректирующего устройства ведется по амплитудно-фазовым частотным характеристикам, то на поле координат (U, V) получается серия кривых $M = \text{const}$ (рис. 7.6, а), причем амплитудно-фазовая частотная характеристика приведенной линейной части скорректированной системы не должна заходить внутрь запретной зоны, определяемой здесь допустимым значением показателя колебательности M (рис. 7.6, б).

Пример. Пусть имеется два варианта (рис. 7.7, а и б) нелинейности $F(x)$ в системе, изображенной на рис. 7.1. Передаточные функции линейных звеньев (рис. 7.1) заданы в виде

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}.$$

Следовательно,

$$W_{\text{л}}(s) = \frac{k_{\text{л}}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad k_{\text{л}} = k_1 k_2.$$

Заданы $T_1 = 0,01$, $T_2 = 0,04$, а величину $k_{\text{л}}$ можно изменять.

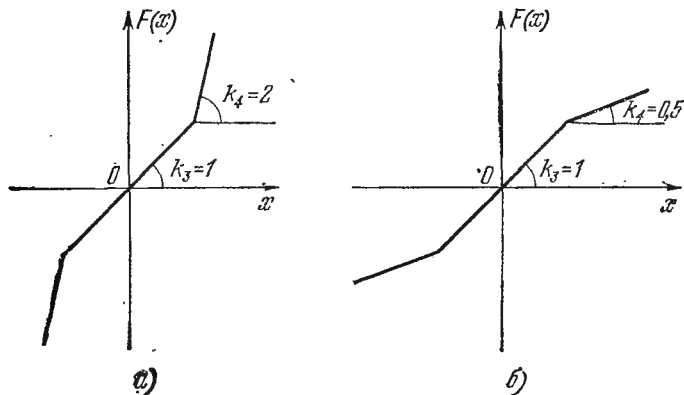
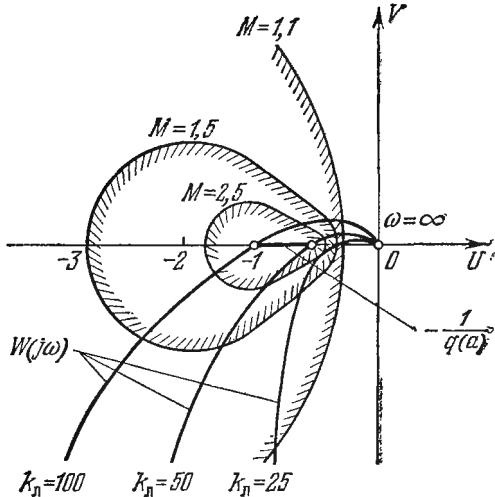
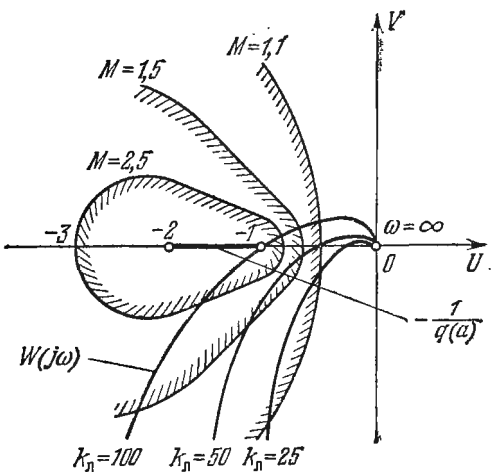


Рис. 7.7.

Крутизна наклона линейных отрезков нелинейной характеристики определяется коэффициентами k_3 и k_4 ,



a)



б)

Рис. 7.8.

причем в первом случае (рис. 7.7, а) $k_3 = 1$, $k_4 = 2$, а во втором случае (рис. 7.7, б) $k_3 = 1$, $k_4 = 0,5$. Здесь нелинейность представлена уже в нормированном виде, поскольку $k_3 = 1$. Поэтому тут $q_0(a) = q(a)$. Очевидно, что коэффициент $q(a)$ меняется в пределах между k_3 и k_4 , т. е. в первом и втором случаях соответственно имеем $1 \leq q_0(a) \leq 2$; $0,5 \leq q_0(a) \leq 1$. Линия $M = \text{const}$ будет иметь вид, представленный на рис. 7.3, где, согласно

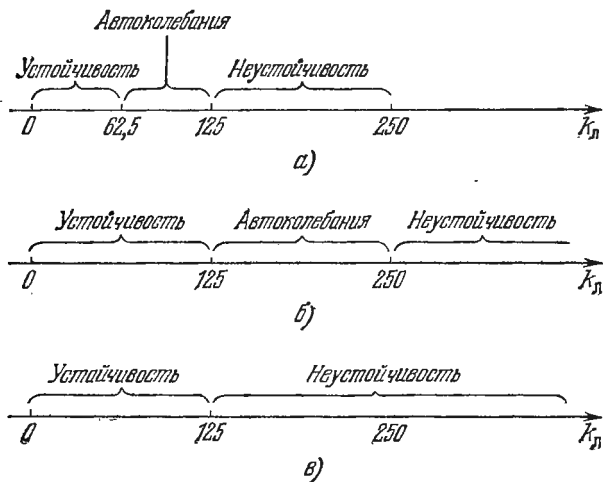


Рис. 7.9.

(7.10) и (7.11), для первого случая (рис. 7.7, а)

$$R_1 = \frac{M}{2(M^2 - 1)}, \quad U_1 = -\frac{M^2}{2(M^2 - 1)},$$

$$R_2 = \frac{M}{M^2 - 1}, \quad U_2 = -\frac{M^2}{M^2 - 1},$$

а для второго (рис. 7.7, б)

$$R_1 = \frac{M}{M^2 - 1}, \quad U_1 = -\frac{M^2}{M^2 - 1},$$

$$R_2 = \frac{M}{0,5(M^2 - 1)}, \quad U_2 = -\frac{M^2}{0,5(M^2 - 1)}.$$

Придавая M разные значения, получаем кривые, показанные на рис. 7.8, *а* и *б* соответственно для первого и второго случаев. Там же нанесены амплитудно-фазовые характеристики линейной части для трех разных значений k_d . Из этих графиков видно, что по сравнению с чисто линейной системой в первом случае (рис. 7.8, *а*) за счет нелинейности запретная зона выпучивается вправо, а во втором (рис. 7.8, *б*) — влево. Следовательно, в первом случае за счет нелинейности повышается колебательность системы, а во втором — нет. Интересно также отметить то, что автоколебания в нелинейной системе определяются (см. § 4.4) условием

$$W_n(j\omega) = -\frac{1}{q(a)}.$$

Правая часть этого равенства изображается графически отрезками вещественной оси соответственно для первого и второго случаев: $-1 \leq U \leq -0,5$, $-2 \leq U \leq -1$. Линейная же система устойчива, если кривая $W(j\omega)$ пересекает вещественную ось правее точки -1 . Следовательно, во втором случае область устойчивости нелинейной системы сохраняется, как в линейной системе, а автоколебания возникают уже за ее пределами. В первом же случае область устойчивости системы за счет нелинейности сужается, и автоколебания возникают там, где линейная система была бы устойчива.

На рис. 7.9 это показано графически: *а*) для первого случая, *б*) для второго случая, *в*) для чисто линейной системы.

§ 7.2. Нелинейные корректирующие устройства

Специального вида нелинейности можно вводить в линейную систему в качестве корректирующих устройств; в результате этого в скорректированном виде линейная система становится нелинейной. Коррекцию с помощью нелинейных устройств производят также и в нелинейных системах. Нелинейная коррекция обладает более широкими возможностями, чем линейная, так как она, во-первых, дает большее разнообразие форм частотных характеристик и, во-вторых, она позволяет менять форму частотных характеристик в зависимости от величины

амплитуды сигнала. Последнее свойство нелинейной коррекции является принципиально новым качеством по сравнению с линейной коррекцией. Оно придает системе как бы свойство самонастройки по величине ошибки, возникающей в системе в процессе управления.

Задачи нелинейной коррекции могут заключаться, как обычно, в достижении желаемых свойств процессов управления, причем должна предусматриваться возможность изменения этих свойств с изменением величины отклонения. Таким образом, открывается возможность преодолевать известное из линейной теории [23] противоречие между требованиями точности и требованиями устойчивости системы, а также значительно усиливать регулирующее воздействие при больших отклонениях и т. д.

Кроме того, если в заданной нелинейной системе имеются вредные для процесса нелинейности (люфт, гистерезис, зона нечувствительности), то путем введения

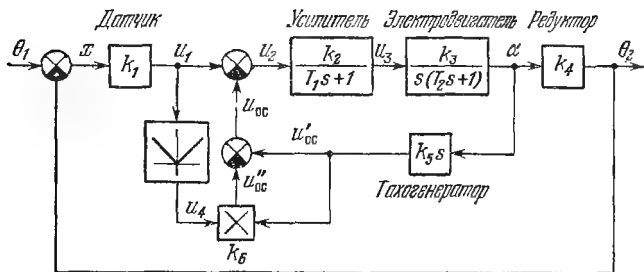


Рис. 7.10.

специальной нелинейной коррекции можно в известной мере ослабить вредное влияние имеющих в системе неизбежных нелинейностей.

В качестве первых примеров рассмотрим введение нелинейного корректирующего устройства в линейную систему.

1. Проанализируем систему с нелинейной обратной связью, сигнал которой уменьшается с возрастанием ошибки. Схема такой системы показана на рис. 7.10. Напряжение, пропорциональное модулю ошибки, подается на вход умножителя и затем вычитается из выходно-

го напряжения тахогенератора, находящегося в цепи линейной обратной связи. Сигнал обратной связи уменьшается, когда ошибка возрастает, что приводит к убыстрению отработки больших отклонений и уменьшению скорости отработки в конце процесса. Динамика системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}x &= \theta_1 - \theta_2, \quad u_1 = k_1 x, \quad u_2 = u_1 - u_{oc}, \\(T_1 p + 1) u_3 &= k_2 u_2, \quad (T_2 p + 1) p \alpha = k_3 u_3, \\ \theta_2 &= k_4 \alpha, \quad u_{oc} = u'_{oc} - u''_{oc}, \\ u'_{oc} &= k_5 p \alpha, \quad u''_{oc} = k_6 u_4 u'_{oc}, \quad u_4 = |u_1|.\end{aligned}$$

Уравнение системы в переходном процессе без внешнего воздействия ($\theta_1 = 0$) имеет вид

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + k_{oc}) p + k] x - k'_{oc} |x| p x = 0, \quad (7.12)$$

где $k_{oc} = k_2 k_3 k_5$, $k'_{oc} = k_1 k_6 k_{oc}$, $k = k_1 k_2 k_4$. Гармоническая линеаризация входящей сюда нелинейности $F(x) = = |x| p x$ для переходного процесса, согласно (6.48), дает

$$F(x) = \left[q(a) + q'(a) \frac{p - \xi}{\omega} \right] x, \quad (7.13)$$

где по формулам (4.11) с учетом (6.47) для данной нелинейности имеем

$$\begin{aligned}q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} |a \sin \psi| (a \omega \cos \psi + a \xi \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} |a \sin \psi| (a \omega \cos \psi + a \xi \sin \psi) \cos \psi d\psi.\end{aligned}$$

После интегрирования получаем

$$q = \frac{8}{3\pi} a \xi, \quad q' = \frac{4}{3\pi} a \omega.$$

Тогда характеристическое уравнение системы (7.12)

примет вид

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + (1 + k_{oc}) \lambda + k + k'_{oc} \frac{4a}{3\pi} (\lambda + \xi) = 0$$

Подстановка $\lambda = \xi + j\omega$ дает два уравнения

$$\begin{aligned} T_1 T_2 \xi^3 + (T_1 + T_2) \xi^2 + \xi \left(1 + k_{oc} - 3T_1 T_2 \omega^2 - \frac{8}{3\pi} k'_{oc} a \right) + \\ + k - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0, \\ 3T_1 T_2 \xi^2 \omega + 2\omega (T_1 + T_2) \xi + \left(1 + k_{oc} - \frac{4}{3\pi} k'_{oc} a - \right. \\ \left. - T_1 T_2 \omega^2 \right) \omega = 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения

$$\omega^2 = 3\xi^2 + 2 \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \xi + \frac{1 + k_{oc}}{T_1 T_2} - \frac{4k'_{oc}}{3\pi T_1 T_2} a,$$

а из первого —

$$\begin{aligned} a = \frac{3\pi}{2k'_{oc} \left(\xi + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right)} \left[4T_1 T_2 \xi^3 + 4(T_1 + T_2) \xi^2 + \right. \\ \left. + (1 + k_{oc}) \xi + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \xi - k + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} (1 + k_{oc}) \right]. \end{aligned}$$

На основании этих двух формул можно построить диаграммы качества нелинейных переходных процессов (см. § 6.4) по любому параметру, например по параметру k . Можно также при всех заданных параметрах определить зависимости $\xi(a)$ и $\omega(a)$ и произвести оценки качества переходных процессов.

2. Рассмотрим более совершенную систему, схема которой изображена на рис. 7.11. Система отличается от прежней тем, что сигнал нелинейной коррекции u_{oc} проходит через контакты реле. В результате при $u_5 < 0$ (т. е. в четных четвертях колебаний) сигнал нелинейной коррекции не подается на вход усилителя. Это — существенное улучшение в сравнении с предыдущей системой, так как там уменьшение демпфирования давалось во всех четвертях колебаний, в то время как в четных чет-

вертях это умепышение пользы не приносит. Здесь оно
исключается за счет отключения коррекции при $u_5 < 0$.

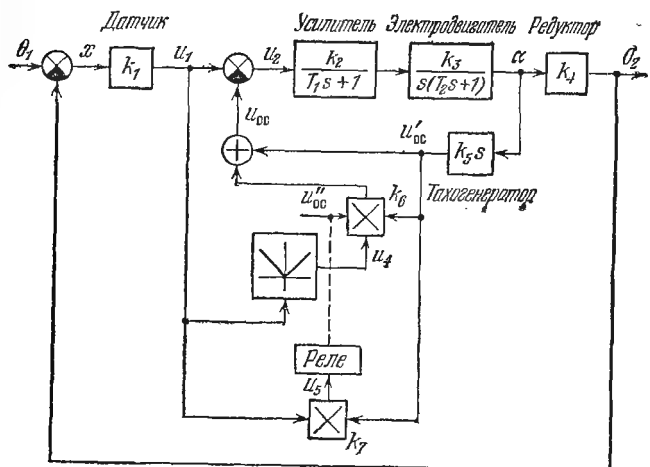


Рис. 7.11.

В результате вместо уравнения (7.12) теперь получим

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + k_{oc}) p + k] x + k'_{oc} F(x) = 0,$$

где

$$F(x) = \begin{cases} -|x|px & \text{при } xpx < 0, \\ 0 & \text{при } xpx \geq 0. \end{cases}$$

Коэффициенты гармонической линеаризации изменяются при этом следующим образом:

$$q = \frac{2}{3\pi} a |\xi| \left(\frac{\left(\frac{\omega}{\xi}\right)^2 + 2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\xi}\right)^2}} - 2 \operatorname{sign} \xi \right)$$

$$q' = \frac{2}{3\pi} a \omega \left(\frac{\operatorname{sign} \xi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\xi}\right)^2}} - 1 \right)$$

Подставив эту общую формулу (7.13), получим

$$F(x) = \frac{2a}{3\pi} \left[(\sqrt{\omega^2 + \xi^2} - \xi)x - \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\omega^2 + \xi^2}}\right)px \right]. \quad (7.14)$$

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы примет вид

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \left[1 + k_{oc} - \frac{2k'_{oc}}{3\pi} a \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\omega^2 + \xi^2}} \right) \right] \lambda + k + \frac{2k'_{oc}}{3\pi} a (\sqrt{\omega^2 + \xi^2} - \xi) = 0.$$

После подстановки $\lambda = \xi + j\omega$ отсюда получаются два уравнения. Каждое из них дает возможность выразить величину a в явном виде:

$$a = \frac{[2T_1 T_2 \xi + (T_1 + T_2)] (\omega^2 + \xi^2) - k}{\frac{2k'_{oc}}{3\pi} (\sqrt{\omega^2 + \xi^2} - \xi)},$$

$$a = \frac{T_1 T_2 \sqrt{\omega^2 + \xi^2}}{\frac{3k_{oc}}{3\pi} (\sqrt{\omega^2 + \xi^2} - \xi)} \left(3\xi^2 + 2 \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \xi + \frac{1 + k_{oc}}{T_1 T_2} - \omega^2 \right).$$

Графическим решением этой системы двух уравнений можно найти значения a и ω для каждого заданного значения ξ . В результате получаются зависимости $\omega(a)$ и $\xi(a)$, характеризующие качество переходных процессов при заданных параметрах системы. Если же менять k или другой параметр системы, то можно построить и диаграммы качества нелинейных переходных процессов в этой системе по любому параметру.

3. Система с ограничением линейности обратной связи схематически показана на рис. 7.12. Уравнения ее заданы в виде

$$\varepsilon = \theta_1 - \theta_2, \quad u = k_1 \varepsilon, \quad u_2 = k_2 u_1, \\ (T_1 p + 1) u_3 = k_3 (u_2 - u_{oc}), \quad u_{oc} = F(\omega_d), \\ n p \theta_2 = \omega_d, \quad (T_2 p + 1) \omega_d = k_4 u_3,$$

где $F(\omega_d)$ — нелинейность, изображенная на рис. 7.12. Применение такой нелинейной обратной связи позволяет уменьшить величину ошибки в динамике при большой скорости обработки (улучшает качество переходного процесса), сохраняя возможность обеспечения необходимого значения k_{oc} при малых скоростях, исходя из требования

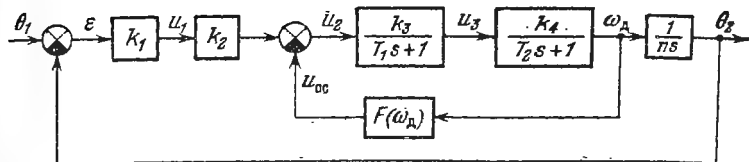
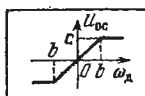


Рис. 7.12.

статической точности. Гармоническая линеаризация для переходного процесса здесь, согласно § 6.4, дает

$$u_{oc} = q(a) \omega_d,$$

причем

$$q(a) = \frac{2}{\pi} k_{oc} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \right). \quad (7.15)$$

Характеристическое уравнение системы:

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 T_2) \lambda^2 + [1 + k_3 k_4 q(a)] \lambda + k = 0,$$

$$k = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{n}.$$

Из двух уравнений, получаемых после подстановки $\lambda = \xi + j\omega$, находим

$$\omega^2 = \frac{k}{T_1 + T_2 + 2\xi T_1 T_2},$$

$$\xi = - \frac{\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} (1 + k_3 k_4 q(a)) - k}{2(1 + k_3 k_4 q(a)) - T_1 T_2 \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 2\xi \right)^2}.$$

Построим зависимости $\xi(a)$ при разных значениях параметра b , входящего в выражение для $q(a)$ (7.15) и определяющего зону линейности характеристики обратной связи (рис. 7.12). Эти зависимости $\xi(a)$ показаны на рис. 7.13. По величине $\xi(a)$ можно составить оценку длительности переходного процесса и выбрать наилучшее значение b .

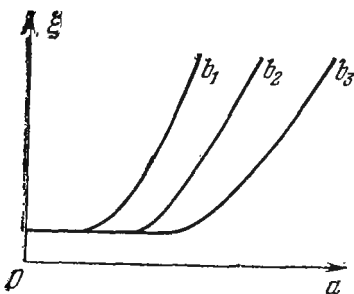


Рис. 7.13.

4. Приведем, наконец, пример введения нелинейной коррекции в нелинейную автоматическую систему. Схема системы представлена на рис. 7.14. Система имеет релейное управление. В качестве корректирующего устройства введена нелинейная

обратная связь по скорости с параболической характеристикой

$$u_{oc} = k_{oc} x^2 \operatorname{sign} x, \quad x = p\beta.$$

После гармонической линеаризации имеем

$$u_{oc} = q_{oc}(a_x) x, \quad q_{oc} = \frac{8}{3\pi} k_{oc} a_x \quad (7.16)$$

где a_x — амплитуда колебаний скорости $x = p\beta$. Релейная характеристика

$$u_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } |u| \leq b, \\ c \operatorname{sign} u & \text{при } |u| \geq b \end{cases}$$

в результате гармонической линеаризации принимает вид

$$u_2 = q(a) u, \quad q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad (7.17)$$

где a — амплитуда колебаний переменной u . Передаточные функции линейных звеньев системы указаны на схеме рис. 7.14.

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы получает вид

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + (k_2 q(a) q_{oc}(a_x) + 1) \lambda + + k_1 k_2 k_3 q(a) = 0. \quad (7.18)$$

Выразим амплитуду a_x через a . Согласно схеме рис. 7.14 получаем

$$a_x = \frac{k_2 q(a)}{\sqrt{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + (T_1 + T_2)^2 \omega^2}} a.$$

Тогда по формуле (7.16) получаем

$$q_{oc} = \frac{8k_{oc}k_2 a}{3\pi \sqrt{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + (T_1 + T_2)^2 \omega^2}} q(a). \quad (7.19)$$

Исследуем устойчивость данной системы с нелинейной обратной связью и сравним со случаем, когда в той

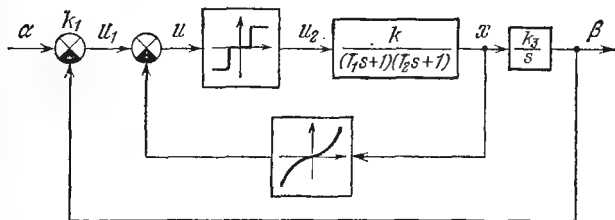


Рис. 7.14.

же релейной системе обратная связь линейна, т. е. когда величина q_{oc} заменяется просто коэффициентом k_{oc} . Границу устойчивости будем искать как границу области существования автоколебаний согласно указанию в конце § 5.4.

Подставив в характеристическое уравнение (7.18) $\lambda = j\omega$, получим

$$\left. \begin{aligned} X &= k_1 k_2 k_3 q(a) - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0, \\ Y &= [k_2 q(a) q_{oc}(a_x) + 1] \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Эти два уравнения с подстановкой (7.19) определяют частоту ω и амплитуду a автоколебаний. Выполнение равенств (7.20) соответствует прохождению кривой Михайлова (при данном значении a) через начало координат (кривая 1 на рис. 7.15). Для устойчивости системы (отсутствие автоколебаний) нужно, однако, чтобы уравнения (7.20) не удовлетворялись в кривая Михайлова охватывала бы начало координат (кривая 2 на рис. 7.15),

т. е. чтобы при $X=0$ выполнялось условие $Y_0(a) > 0$ при любом значении a . Удобнее пользоваться выражением

$$Y'_0(a) = \frac{Y_0'(a)}{\omega}.$$

Поскольку параметр $\omega > 0$, то данное условие устойчивости можно записать в виде

$$Y'(a) > 0. \quad (7.21)$$

Из условия $X=0$, согласно (7.20), выразим параметр ω через величину a :

$$\omega^2 = \frac{k_1 k_2 k_3}{T_1 + T_2} q(a) \quad (7.22)$$

и подставим его в выражение для $Y(a)$, используя одновременно и подстановку (7.19). В результате получим условие устойчивости (7.21) в виде

$$Y'_0 = \frac{8k_{oc}k_2^2}{3\pi f(a)} a q^2(a) + 1 - \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_2 k_3 q(a) > 0, \quad (7.23)$$

где

$$f(a) = \sqrt{\left[1 - \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_2 k_3 q(a)\right]^2 + (T_1 + T_2) T_1 T_2 k_1 k_2 k_3 q(a)}.$$

В случае, если в данной релейной системе обратная связь линейна, т. е. $q_{oc} = k_{oc}$, получим согласно (7.20) более простое выражение условия устойчивости:

$$Y'_0 = k_2 k_{oc} q(a) + 1 - \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_2 k_3 q(a) > 0,$$

или

$$1 - \left(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_3 - k_{oc} \right) k_2 q(a) > 0. \quad (7.24)$$

Отсюда видно, что если

$$k_{oc} > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_3, \quad (7.25)$$

то система устойчива при любых значениях коэффициента усиления k_2 и сигнала с реле.

При

$$k_{oc} < \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_3 \quad (7.26)$$

условие (7.24) будет удовлетворено при всех значениях a в том случае, если оно удовлетворяется при наибольшем значении q . График $q(a)$, согласно (7.17), имеет вид, изображенный на рис. 7.16, а условие устойчивости релейной системы с линейной обратной связью (7.24) принимает вид

$$k_{oc} > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_3 - \frac{\pi b}{2c k_2} \quad (7.27)$$

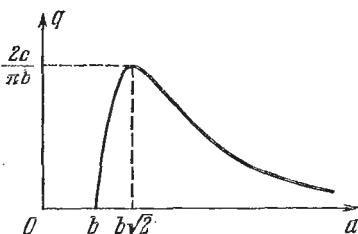


Рис. 7.16.

В соответствии с этим на рис. 7.17 изображена область устойчивости на плоскости $k_2 k_{oc}$ в случае линейной обратной связи.

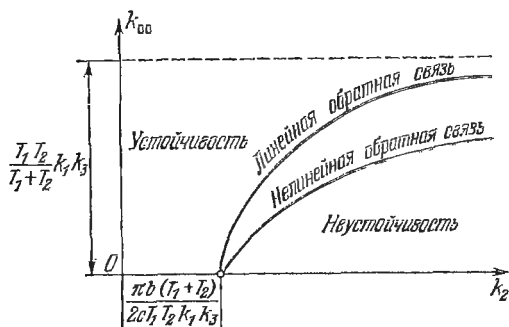


Рис. 7.17.

Аналогично на основании выражения (7.23) запишем условие устойчивости релейной системы с нелинейной обратной связью:

$$1 - \left[\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_3 - \frac{8 k_{oc} k_2}{3 \pi f(a)} a q(a) \right] k_2 q(a) > 0.$$

Здесь также надо потребовать удовлетворения этого условия при наибольшем значении $q(a)$. Условие устойчивости примет вид

$$k_{oc} > \left(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_3 - \frac{\pi b}{2c k_2} \right) \frac{3\pi^2 f_1}{32c k_2} \quad (7.28)$$

где

$$f_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 k_2 k_3 \frac{2c}{\pi b} \right)^2 + \frac{2c}{\pi b} (T_1 + T_2) T_1 T_2 k_1 k_2 k_3}.$$

Поскольку в первом грубом приближении величина f_1 пропорциональна величине ck_2 , то характер очертания границы устойчивости сохранится. Если при этом множитель за скобкой в выражении (7.28) можно сделать меньшим единицы, то за счет нелинейности обратной связи можно расширить область устойчивости, как показано на рис. 7.17.

§ 7.3. Псевдолинейная коррекция

Псевдолинейными корректирующими устройствами называются такие нелинейные корректирующие устройства, у которых эквивалентные передаточные функции (а значит, и коэффициенты гармонической линеаризации), в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе, *зависят только от частоты* и не зависят от амплитуды. Однако эта зависимость от частоты — нелинейная в том смысле, что характер ее отличается от частотной зависимости линейных передаточных функций и может быть произвольным, т. е. отсутствует жесткая связь между амплитудными и фазовыми характеристиками, которая имеется у линейных звеньев. Это важное достоинство псевдолинейных устройств позволяет корректировать фазовые соотношения независимо от амплитудных и наоборот, что невозможно сделать линейными средствами.

Результат гармонической линеаризации при исследовании устойчивости для псевдолинейного устройства $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \left[q(\omega) + \frac{q'(\omega)}{\omega} p \right] x,$$

а при исследовании колебательных переходных процессов

$$F(x) = \left[q(\omega) + \frac{q'(\omega)}{\omega} (p - \xi) \right] x.$$

Эти выражения можно представить в другой форме:

$$F(x) = \frac{k^*(\omega)}{T^*(\omega)p + 1} x, \quad (7.29)$$

где для исследования устойчивости имеем

$$k^* = \frac{q^2(\omega) + q'^2(\omega)}{q(\omega)}, \quad T^* = \frac{-q'(\omega)}{\omega q(\omega)}, \quad (7.30)$$

а для колебательных переходных процессов

$$k^* = \frac{q^2(\omega) + q'^2(\omega)}{-q(\omega) + \frac{\xi}{\omega} q'(\omega)}, \quad T^* = \frac{-q'(\omega)}{\omega \left[q(\omega) + \frac{\xi}{\omega} q'(\omega) \right]}. \quad (7.31)$$

Такие псевдолинейные корректирующие устройства тоже обладают большими дополнительными возможностями улучшения качества процессов управления по сравнению с линейными устройствами.

Приведем несколько примеров.

1. Коррекция апериодического звена. Ставится задача существенного уменьшения инерционности, т. е. отставания выходного сигнала по фазе $\psi = \arctg T\omega$, апериодического звена

$$(Tp + 1)y = kx. \quad (7.32)$$

В одной из возможных схем такой коррекции (рис. 7.18, а) при помощи ключа отсекаются хвостовые части выходного сигнала, причем последний приобретает форму, показанную штриховкой на рис. 7.18, б. Тогда выражения (4.11) для коэффициентов гармонической линейаризации примут вид

$$q = \frac{k \cos \psi}{\pi} [\cos \psi (\pi - \psi) + \sin \psi], \quad q' = \frac{k \sin 2\psi}{2\pi} (\psi - \pi),$$

где $\psi = \arctg T\omega$. Видно, что q и q' будут зависеть лишь от частоты ω , но не от амплитуды, что характерно для псевдолинейных корректирующих устройств. Применяя

другую форму гармонической линеаризации (7.29), получим для скорректированного апериодического звена вместо (7.32) уравнение

$$[T^*(\omega)p + 1]y = k^*(\omega)x,$$

в котором новые эквивалентные постоянная времени T^* и коэффициент усиления k^* определяются формулами

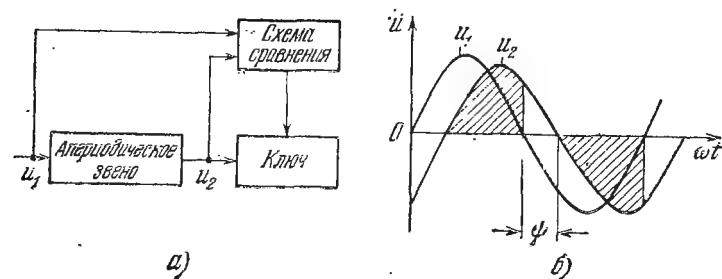


Рис. 7.18.

(7.30) или (7.31) через найденные уже $q(\omega)$ и $q'(\omega)$. На рис. 7.19 приведены графики их зависимости от частоты. Видно существенное снижение инерционности (на-

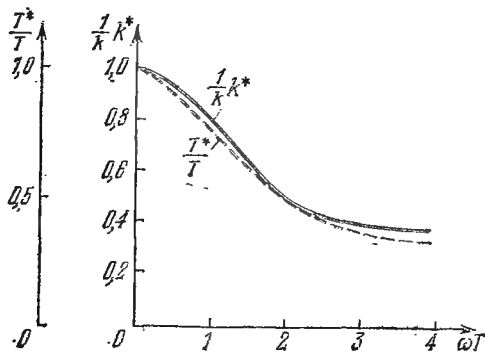


Рис. 7.19.

пример, при $\omega T = 2$ получается примерно $T^* = 0,5T$), но при этом примерно во столько же раз снижается и усиление k^* .

Лучший эффект получается при введении дополнительного упреждения γ (рис. 7.20) при ключевом вырезании части выходного сигнала. При этом получается

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{k \cos \psi}{\pi} \left[(\pi - \psi - \gamma) \cos \psi + \frac{1}{2} \sin 2\gamma + \sin \psi \cos^2 \gamma \right], \\ q' &= \frac{k \cos \psi}{\pi} [(\psi + \gamma - \pi) \sin \psi + \sin \gamma \sin (\psi + \gamma)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Графики для T^* и k^* в зависимости от ω приобретают вид, показанный на рис. 7.21. Таким способом

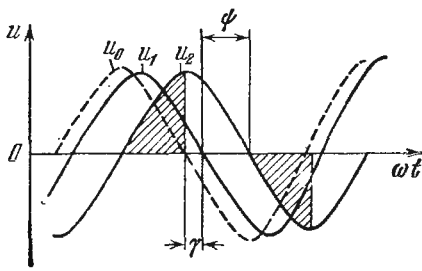


Рис. 7.20.

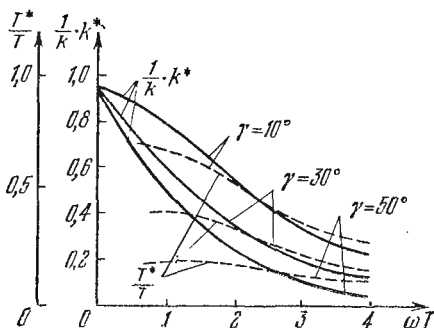


Рис. 7.21.

можно уменьшать фазовое запаздывание в тех звеньях системы, которые обладают большой постоянной времени, плохо влияющей на качество процесса управления.

2. Коррекция инерционности дифференцирующего контура. Задана схема системы с дифференцирующим контуром $F(u)$ (рис. 7.22), нелинейность которого состоит в коррекции его инерционности,

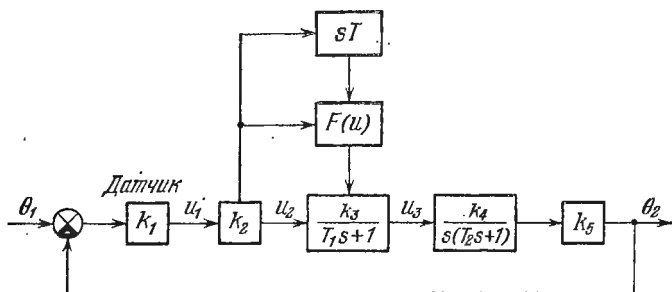


Рис. 7.22.

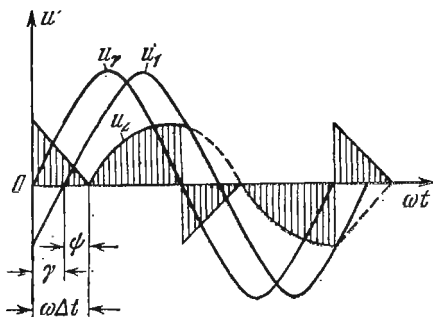


Рис. 7.23.

как показано на рис. 7.23. Выходной сигнал, обозначенный штриховкой, в хвостовой своей части изменяет знак на противоположный. Тогда вместо линейного дифференцирующего звена

$$(Tp + 1)y = Tru$$

получаем нелинейное (псевдолинейное) с эквивалентным уравнением

$$y = \left[q(\omega) + \frac{q'(\omega)}{\omega} p \right] \rho u,$$

где

$$q = \frac{2 \cos^2 \psi}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \psi - \gamma + \frac{\cos \gamma}{\cos \psi} \sin (\psi + \gamma) \right],$$

$$q' = \frac{\sin 2\psi}{\pi} \left[- \left(\frac{\pi}{2} - \psi - \gamma \right) + \frac{\sin \gamma}{\sin \psi} \sin (\psi + \gamma) \right],$$

γ — заданное опережение, $\psi = \arctg T\omega$. Величина q'

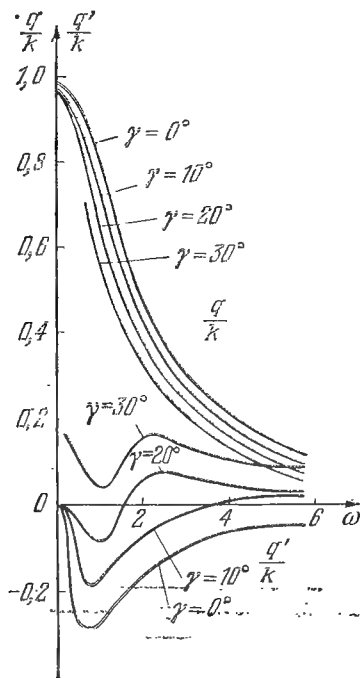


Рис. 7.24.

может быть сделана положительной. Зависимость коэффициентов гармонической линеаризации q и q' от частоты колебаний ω показана на рис. 7.24 при различных заданных опережениях γ .

Уравнение для ошибки системы (см. рис. 7.22) получает вид

$$\left[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p + T k q(\omega) p + T k \frac{q'(\omega)}{\omega} p^2 + k \right] \varepsilon = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p \theta_1$$

где $k = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5$. Характеристическое уравнение системы:

$$T_1 T_2 \lambda^3 + \left[T_1 + T_2 + \frac{q'(\omega)}{\omega} k T \right] \lambda^2 + [1 + k T q(\omega)] \lambda + k = 0.$$

Частота определяется формулой (после подстановки $\lambda = j\omega$):

$$\omega^2 = \frac{1 + k T q(\omega)}{T_1 T_2}.$$

Граница устойчивости $\Delta_{n-1} = 0$ описывается выражением

$$k^2 + k \left[\frac{(T_1 + T_2) \omega}{T q'(\omega)} + \frac{1}{T q(\omega)} - \frac{T_1 T_2 \omega}{T^2 q(\omega) q'(\omega)} \right] + \frac{(T_1 + T_2) \omega}{T^2 q(\omega) q'(\omega)} = 0.$$

Исследование показывает, что область устойчивости системы за счет такой коррекции значительно увеличи-

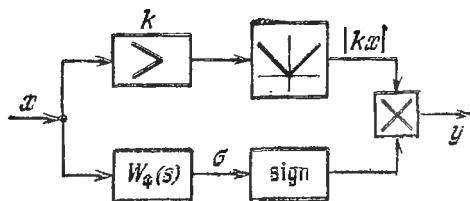
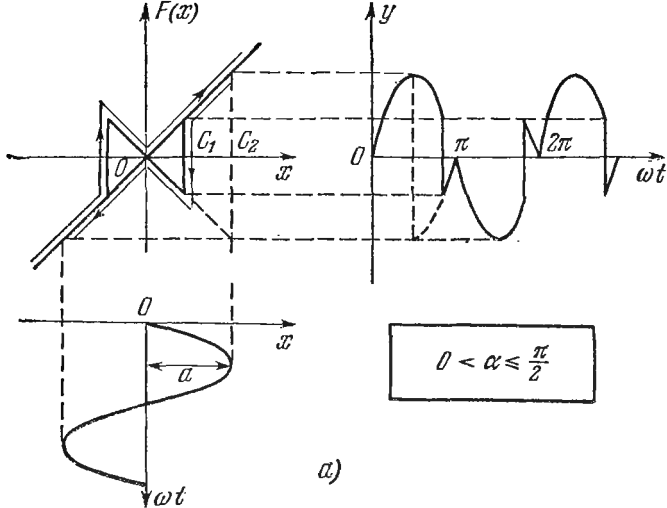


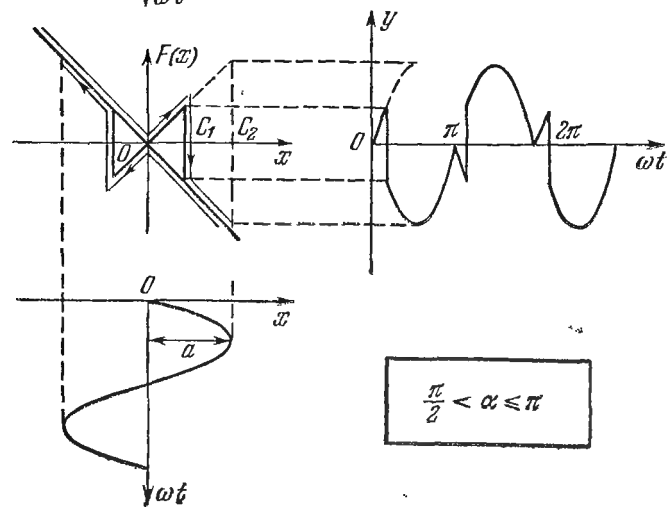
Рис. 7.25.

вается, т. е. можно существенно повысить общий коэффициент усиления k , не вызывая неустойчивости системы.

3. Нелинейный фильтр с фазовым опережением. Схема, показанная на рис. 7.25, позволяет получить фазовое опережение без изменения амплитуды. Она аналогична звену переменной структуры, но вместо сложения сигналов введено умножение модуля $|kx|$ на



a)



b)

Рис. 7.26.

sign σ , где σ — выход линейного фильтра $W_\Phi(s)$, создающего опережение. На рис. 7.26 приведены нелинейные характеристики этой схемы при разных значениях опережения α , получаемых выбором параметров схемы. Так, при $0 < \alpha < \pi/2$ имеем

$$OC_2 = a, \quad \frac{OC_1}{OC_2} = \sin \alpha,$$

а при $\pi/2 < \alpha < \pi$

$$OC_2 = a, \quad \frac{OC_1}{OC_2} = \cos \alpha,$$

где a — амплитуда входных колебаний, причем при $\alpha = \pi/2$ точки C_1 и C_2 сливаются. Если линейная часть фильтра имеет вид

$$W_\Phi(s) = \frac{Ts + 1}{T_1s + 1},$$

то опережение

$$\alpha = \arctg \frac{\omega T (1 - \gamma)}{1 + \omega^2 T^2 \gamma}, \quad \gamma = \frac{T_1}{T}. \quad (7.34)$$

Для коэффициентов гармонической линеаризации имеем формулы

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi (|kx| a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi (|kx| a \sin \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

причем интегралы разбиваются на два с пределами соответственно $(0, \alpha)$ и (α, π) . В результате получаем

$$q = \frac{k}{\pi} (\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha), \quad q' = \frac{k}{\pi} (1 - \cos 2\alpha),$$

где $\alpha = f(\omega)$ выражается формулой (7.34). Как видим, данная нелинейная схема относится к классу псевдолинейных. Получаемое фазовое опережение

$$\mu = \arctg \frac{q'(\omega)}{q(\omega)}$$

показано на рис. 7.27 при разных значениях γ в зависимости от частоты ω , отложенной по логарифмической

шкале. При этом амплитудное искажение $Q(\omega)$, определяемое величиной

$$Q(\omega) = \sqrt{q^2(\omega) + q'^2(\omega)},$$

оказывается незначительным (менее 4 дБ), что вполне приемлемо для решения поставленной задачи.

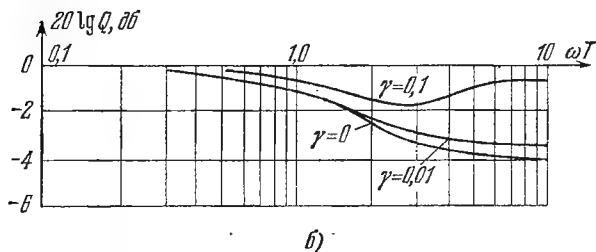
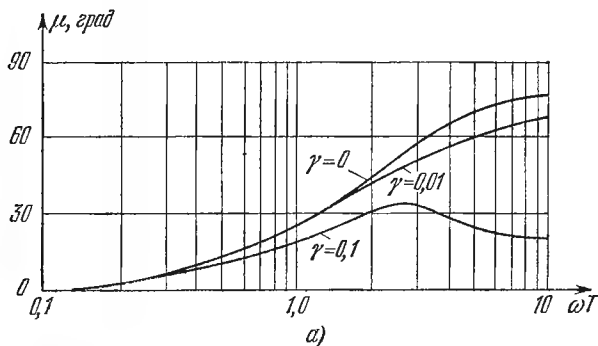


Рис. 7.27.

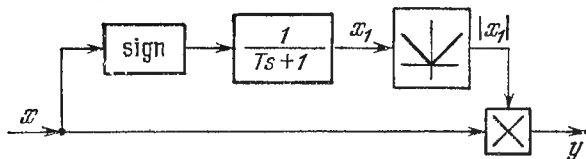


Рис. 7.28.

4. Нелинейный фильтр с амплитудным ослаблением. Схема, изображенная на рис. 7.28, позволяет получить ослабление амплитуды с ростом частоты

без изменения фазы. Выходной сигнал $y = |x_1|x$ связан с x соотношением

$$(Tp + 1)x_1 = \text{sign } x.$$

Формы колебаний входящих сюда переменных при $x = a \sin \omega t$ показаны на рис. 7.29, причем

$$x_1 = x_{10} e^{-t/T} \pm (1 - e^{-t/T}),$$

где

$$x_{10} = \pm \frac{1 - e^{-\pi/\omega T}}{1 + e^{-\pi/\omega T}}.$$

Используя формулы гармонической линеаризации (7.35), нужно заменить в этих формулах kx на x_1 и

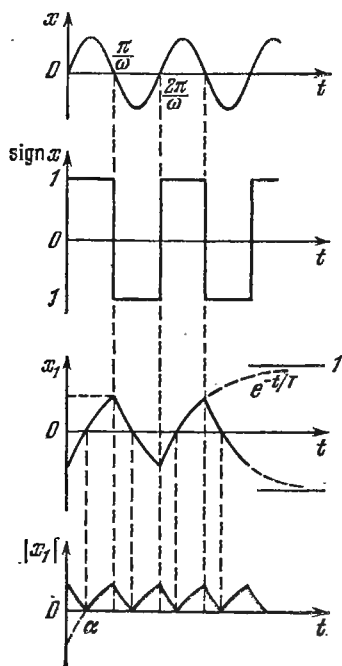


Рис. 7.29.

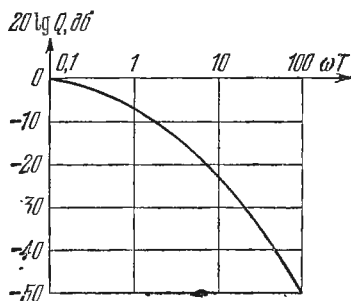


Рис. 7.30.

разбить каждый интеграл на два: $(0, \alpha)$ и (α, π) , где α — точка переметы знака x_1 (см. рис. 7.29), определяемая выражением

$$\alpha = \omega T \ln \frac{2}{2 + e^{-\pi/\omega T}}. \quad (7.36)$$

Результат интегрирования

$$q = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2 \sin \alpha}{\pi (1 + 4\omega^2 T^2)} (\cos \alpha - 2\omega T \sin \alpha),$$

$$q' = -\frac{2 \sin \alpha}{\pi (1 + 4\omega^2 T^2)} (\sin \alpha + 2\omega T \cos \alpha)$$

(снова отмечаем зависимость q и q' только от частоты, но не от амплитуды). На рис. 7.30 показана амплитудная характеристика

$$Q(\omega) = \sqrt{q^2(\omega) + q'^2(\omega)}$$

такого псевдолинейного фильтра. Из характеристики видно эффективное подавление амплитуды колебаний. Легко проверить, что фазовое искажение при этом незначительно.

§ 7.4. Системы с переменной структурой

Некоторые простейшие вопросы, связанные с системами с переменной структурой уже затрагивались нами ранее в § 2.4. Вообще говоря, в таких системах возможны различные виды процессов. Но, как отмечалось в § 2.4, особый интерес представляет такое формирование управляющего устройства в системе с переменной структурой, которое реализует скользящий процесс. Преимущество последнего состоит, в частности, в том, что его форма не зависит от параметров основной части системы и может протекать с желательными для конструктора свойствами. Поэтому дальше будет излагаться только задача построения систем переменной структуры с организацией скользящего режима.

Схема системы представлена на рис. 7.31. Пусть динамика основной части системы (управляемый объект с исполнительным устройством) при отсутствии внешнего воздействия описывается уравнением

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) x = -bu, \quad (7.37)$$

где x — отклонение регулируемой величины, u — управляющий сигнал на исполнительное устройство. Обозначим

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx_1}{dt}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{dx_{n-1}}{dt}. \quad (7.38)$$

Тогда уравнение (7.37) можно представить в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= -(a_1 x_{n-1} + \dots + a_{n-1} x_2 + a_n x_1) - bu, \\ \frac{dx_i}{dt} &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Функцию управления с переключением структуры, формируемую в логическом управляющем устройстве, выберем в виде

$$u = \Psi x_1, \quad (7.40)$$

где

$$\Psi = \begin{cases} \alpha & \text{при } x_1 y > 0, \\ \beta & \text{при } x_1 y < 0, \end{cases} \quad (7.41)$$

причем α, β — постоянные коэффициенты ($\alpha > \beta$), а пе-

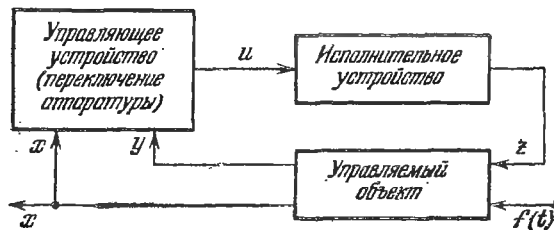


Рис. 7.31.

ременная y складывается из отклонения x_1 и $n - 1$ его производных:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad c_i = \text{const}, \quad c_n = 1. \quad (7.42)$$

В этом случае говорят, что *имеется полная информация о состоянии системы*. На практике же иметь точные значения всех производных невозможно.

Сначала рассмотрим идеализированную систему (в конце параграфа будет сказано о реальном случае систем с неточной и неполной информацией). Переключение структуры будет происходить, согласно (7.41) и (7.42), при

$$y = \sum_{i=1}^n c_i x_i = 0. \quad (7.43)$$

В n -мерном пространстве это будет гиперплоскость. Напомним, что на фазовой плоскости (§ 2.4) мы имели прямую линию переключения (2.26), а в трехмерном пространстве это была бы обычная плоскость (для системы третьего порядка, когда $n = 3$).

Условие возникновения скользящего процесса состоит в том, чтобы фазовые траектории встречались на гиперплоскости переключения, подходя к ней с обеих сторон, или же принадлежали бы этой гиперплоскости. (В системе второго порядка они встречались на линии переключения (рис. 2.18).) Следовательно, требуется, чтобы, с одной стороны, гиперплоскости переключения (7.43), где $y > 0$, производная dy/dt была неположительной, а с другой стороны, гиперплоскости, где $y < 0$, производная dy/dt была неотрицательной. Это условие возникновения скользящего процесса можно записать в виде

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{dy}{dt} \leq 0, \quad \lim_{y \rightarrow -0} \frac{dy}{dt} \geq 0, \quad (7.44)$$

где ± 0 обозначает пределы стремления y к нулю со стороны соответственно положительных и отрицательных значений y .

Определим вид дифференциального уравнения, которым описывается скользящий процесс. Согласно (7.43), (7.42) и (7.38) получим для скользящего процесса систему уравнений

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i, \quad \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (7.45)$$

Отсюда видны два важных свойства. Во-первых, порядок системы по сравнению с исходной (7.39) на единицу понижается. Во-вторых, в уравнения (7.45) входят только параметры c_i управляющего устройства. Поэтому форма скользящего процесса не зависит от параметров основной части системы (объекта и исполнительного устройства), входящих в коэффициенты a_i исходного уравнения (7.37). Напомним, что рассматривается идеальный случай при полной и точной информации о состоянии системы. В неидеальном случае будут, естественно, отступления от этих свойств, но все же в первом приближении на них можно опираться.

Итак, организуя скользящий процесс в системе с переменной структурой, можно придавать этому процессу желаемые свойства путем выбора значений коэффициентов c_i управляющего устройства. Следовательно, задача проектировщика состоит в построении системы так, чтобы

условия возникновения скользящего процесса (7.44) реализовались.

Как показано в [9], из анализа условий (7.44) совместно с уравнениями (7.45) и (7.39) получаются следующие необходимые и достаточные условия того, чтобы на гиперплоскости (7.43) существовал скользящий процесс:

$$\begin{aligned} b\alpha &\geq -a_n + c_1 a_1 - c_1 c_{n-1}, \\ b\beta &\leq -a_n + c_1 a_1 - c_1 c_{n-1}, \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$\frac{c_{i-1} - a_{n-i+1}}{c_i} = c_{n-1} - a_1, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (7.47)$$

В [9] получено условие устойчивости движения системы по гиперплоскости скольжения. Доказано, что для этой цели надо составить характеристическое уравнение системы (7.37) с заменой

$$bu = -[a_n + c_1(c_{n-1} - a_1)]x;$$

это уравнение получает вид

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda - c_1(c_{n-1} - a_1) = 0. \quad (7.48)$$

Для устойчивости движения системы по гиперплоскости скольжения необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (7.48), кроме одного, имели отрицательные вещественные части.

Проиллюстрируем применение этих положений на примере следующей системы третьего порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -u,$$

причем

$$u = \Psi x_1,$$

где

$$\Psi = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 y > 0, \\ -1 & \text{при } x_1 y < 0, \end{cases}$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3.$$

Сравнивая эти выражения с (7.39) и (7.41), видим, что здесь $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Поэтому условия (7.46) и (7.47), реализующие скользя-

щий процесс, получают вид

$$1 \geq -c_1 c_2, \quad -1 \leq -c_1 c_2, \quad c_1 = c_2^2. \quad (7.49)$$

Уравнения скользящего процесса (7.45) будут иметь второй порядок:

$$\frac{dx_2}{dt} = -c_1 x_1 - c_2 x_2, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2. \quad (7.50)$$

Выбором коэффициентов c_1 и c_2 (не нарушающим написанного выше условия) можно придавать желательные свойства форме скользящего процесса. Для устойчивости системы в скользящем процессе требуется $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что не противоречит условиям (7.49).

Исследуем также устойчивость движения системы по гиперповерхности скольжения. Для этого, согласно (7.48), имеем характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^3 - c_1 c_2 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{c_1 c_2}, \quad \lambda_{2,3} = \sqrt[3]{c_1 c_2} \left(-\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Здесь только один корень положителен, а остальные два имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, движение системы по гиперплоскости скольжения устойчиво.

Выше было изложено идеализированное представление о системах с переменной структурой, предполагающее, во-первых, наличие в системе точного измерения всех $n-1$ производных регулируемой величины и, во-вторых, линейность объекта и исполнительного устройства. На практике нереально иметь точные значения производных, особенно высокого порядка. Свойства строгой линейности также могут нарушаться. Вследствие этого в системе не получится идеального скользящего процесса и не будет полной независимости формы процесса от параметров основной части системы. Однако процесс может быть близок к скользящему.

Проанализируем характер отклонения реального процесса от идеального скользящего за счет указанной неполноты и неточности информации о состоянии системы. Пусть система описывается дифференциальным уравне-

нем (7.37) или в преобразованном виде — уравнением (7.39) с логическим управляющим устройством (7.40), (7.41). Но вместо (7.42), где введены точные значения всех производных $\dot{x}_i$ от регулируемой величины x_1 , в реальной системе величина y будет определяться другим выражением. Например, если дифференцирующие устройства имеют передаточные функции

$$W_i(s) = \frac{s}{T_i s + 1},$$

то вместо алгебраической суммы (7.42) получится некоторая передаточная функция или дифференциальное уравнение вида

$$Q(p)y = R(p)x_1. \quad (7.51)$$

Этим и определится реальная зависимость величины y от x_1 в законе переключений структуры (7.41). Это вызовет

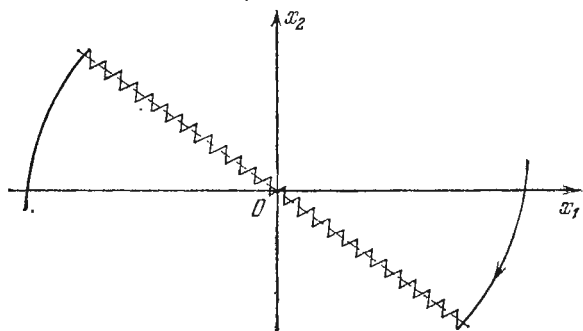


Рис. 7.32.

некоторые искажения хода фазовых траекторий в районе прежней идеализированной гиперплоскости скольжения. Основную роль будет играть инерционное запаздывание моментов переключения. В результате пзображающая точка системы в фазовом пространстве не пойдет точно по гиперплоскости скольжения, а будет иметь колебания около нее. Эти колебательные отклонения реального процесса от идеального скользящего будут тем больше, чем

больше величины постоянных времен T_i дифференцирующих устройств.

Кроме этого, в реальной системе неполнота информации связана еще с тем, что измеряться будут не все $n-1$ производные, а только малое число низших производных, что дает дополнительное искажение процесса.

Указанные колебательные отклонения реального процесса от идеального скольжения будут зависеть уже не только от параметров управляющего устройства, как в идеальном случае, но также в какой-то степени и от параметров основной части системы.

Существуют точные методы определения такого реального процесса для систем второго порядка и приближенные — для систем высокого порядка [9]. Приближенно реальный процесс скользящего типа с указанными колебаниями может быть определен и с помощью метода гармонической линеаризации [27]. На фазовой плоскости реальный процесс изобразится, например, как показано на рис. 7.32. Таким образом, на идеальную линию скольжения в реальной системе будут наложены колебания с большей или меньшей амплитудой в зависимости от степени неполноты и неточности информации о состоянии системы.

§ 8.1. Виды нелинейных дискретных систем

К дискретным системам относятся импульсные и цифровые системы. Общее понятие о дискретных системах было дано в учебном пособии по линейной теории [23, гл. 9]. Там описаны три вида импульсной модуляции: амплитудная, широтная и фазовая, с постоянным периодом чередования импульсов. Кроме того, существует еще частотная импульсная модуляция, когда размер импульса неизменен, а частота (период) следования импульсов меняется в зависимости от входного сигнала. Все эти четыре вида импульсной модуляции характеризуются квантованием входного непрерывного сигнала по времени. Цифровые же системы отличаются одновременным квантованием сигнала во времени и по уровню. При этом эффект квантования сигнала по уровню тем значительнее сказывается на особенностях процесса управления, чем меньше число разрядов, т. е. чем больше размер ступенек квантования уровня сигнала. В том случае, когда в контур системы управления включается цифровой вычислитель (ЦВМ), к отмеченным особенностям добавляются, во-первых, преобразование сигнала в соответствии с заданным вычислительным алгоритмом и, во-вторых, временное запаздывание, обусловленное временем, необходимым для процесса вычисления.

К дискретным системам относят также релейные системы. Но их анализ уже был проведен в предыдущих главах, начиная с главы 1, наряду с непрерывными нелинейными системами. Поэтому здесь мы обратимся к импульсным нелинейным системам.

Амплитудно-импульсный элемент (рис. 8.1, а) является линейным, когда имеет место [23] линейная зависимость между амплитудой импульсов и значениями входной величины в моменты начала импульсов (рис. 8.2, а). Такой элемент будет нелинейным, если

указанная зависимость нелинейна (рис. 8.2, б). Что же касается широтно-импульсного (рис. 8.1, б) и фазо-импульсного (рис. 8.1, в) элементов, то в них амплитуда

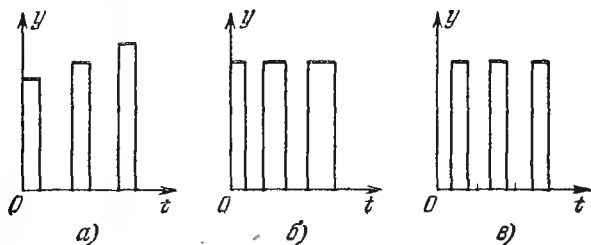


Рис. 8.1.

импульсов постоянна по величине и меняет знак с изменением знака входной величины (рис. 8.3, а). Ширина импульса или фаза соответственно меняются в зависимости от входной величины на некотором участке линейно,

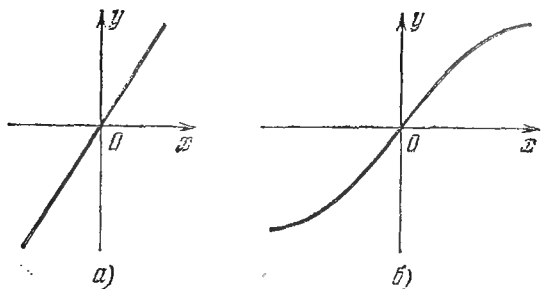


Рис. 8.2.

но с ограничениями по наименьшему и наибольшему значениям (рис. 8.3, б), так как существует, во-первых, минимальная ширина импульса τ , во-вторых, нельзя выходить за пределы периода следования импульсов (см. § 9.4 в [23]). В связи с этим широтно-импульсные и фазо-импульсные элементы следует считать нелинейными по своей природе.

Нелинейность же цифрового кодирования обусловлена квантованием сигнала по уровню, т. е. ступенчатой зави-

симостью (рис. 8.4). В случае достаточного большого числа разрядов цифрового кодирования такой нелинейностью можно пренебречь. Однако это требует всегда проверки,

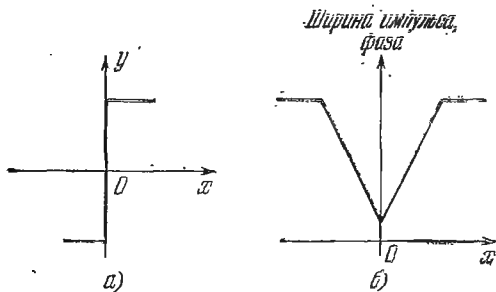


Рис. 8.3.

так как небольшое число разрядов квантования по уровню в таких элементах может вызывать появление автоколебаний в системе, что будет рассмотрено ниже.

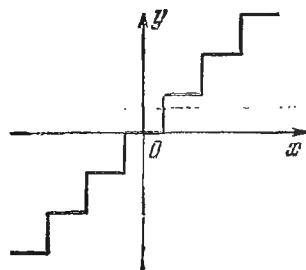


Рис. 8.4.

Дискретная система будет нелинейной еще и в том случае, если непрерывная часть ее включает в себя какое-либо нелинейное звено (если даже сам импульсный элемент линеен).

Динамические процессы в дискретных нелинейных системах существенно отличаются от соответствующих процессов в непрерывных нелинейных системах. Так, собственные колебания системы здесь будут

обусловлены не только собственными свойствами непрерывной части системы (т. е. некоторой собственной частотой), но еще и принудительной частотой чередования импульсов. Это приводит к более сложным формам собственных колебаний, как переходных затухающих, так и периодических, а также почти периодических. То же самое относится и к формам вынужденных колебаний в дискретных нелинейных системах, которые оказываются более сложными. Однако здесь также возможно явление

захватывания, как и в непрерывных нелинейных системах (§ 6.1), т. е. при определенных условиях — подавление собственных колебаний вынужденными.

§ 8.2. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных дискретных систем

Напомним, что абсолютная устойчивость имеет место в том случае, если система устойчива в целом при произвольной форме нелинейности определенного класса (см. § 5.1). Рассмотрим здесь два вида нелинейных дискретных систем: а) с нелинейным амплитудно-импульсным элементом; б) с цифровым кодированием.

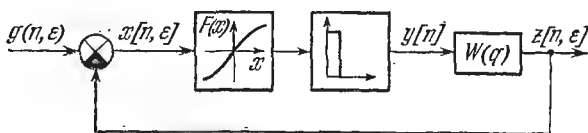


Рис. 8.5.

Схема дискретной системы с нелинейным импульсным элементом представлена на рис. 8.5. Приведем без доказательства критерий абсолютной устойчивости состояния

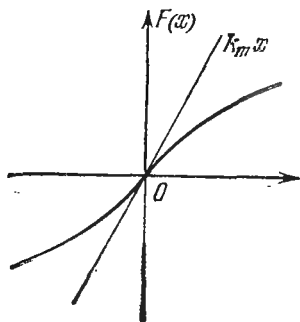


Рис. 8.6.

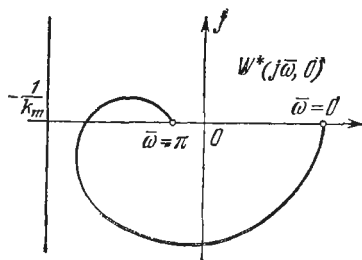


Рис. 8.7.

равновесия такой системы [31]. Пусть нелинейная характеристика $F(x)$ располагается внутри сектора $(0, k_m)$ (рис. 8.6). В этом случае достаточный критерий абсолютной устойчивости формулируется следующим образом,

Достаточный критерий абсолютной устойчивости. Состояние равновесия нелинейной импульсной системы (рис. 8.5) с устойчивой приведенной непрерывной частью будет абсолютно устойчивым, если в диапазоне частот $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{k_m} + \operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}, 0) > 0, \quad (8.1)$$

где $W^*(j\bar{\omega}, 0)$ — амплитудно-фазовая характеристика приведенной непрерывной части.

Условие (8.1) можно представить графически, как

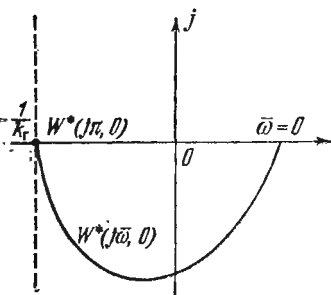


Рис. 8.8.

показано на рис. 8.7, т. е. для устойчивости нелинейной импульсной системы типа представленной на рис. 8.5 достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика приведенной непрерывной части системы $W^*(j\bar{\omega}, 0)$ лежала справа от вертикальной прямой, проходящей через точку $-1/k_m$, где k_m определяет верхнюю границу расположения нелинейной характеристики (рис. 8.6).

Если, например, непрерывная часть системы рис. 8.5 имеет передаточную функцию

$$W_n(q) = \frac{2}{q + 0,02},$$

и дискретное корректирующее устройство

$$W_k^*(q, 0) = \frac{0,3e^q - 0,1}{e^q - 0,3},$$

то для приведенной непрерывной части получим

$$W^*(q, 0) = \frac{2}{e^q - 0,98} \cdot \frac{0,3e^q - 0,1}{e^q - 0,3}.$$

Заменив $q = j\bar{\omega}$ и меняя $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$, получим амплитудно-фазовую характеристику (рис. 8.8). Поскольку вертикальная линия, определяемая значением $-1/k_m$, должна лежать слева, то можно определить граничное значение k_r

коэффициента k_m , до которого система остается абсолютно устойчивой. Из рис. 8.8 находим

$$k_r = \frac{1}{|W^*(j\pi, 0)|} = 3,25.$$

Более общий случай критерия абсолютной устойчивости для нелинейных импульсных систем см. в [31].

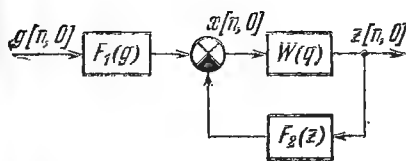


Рис. 8.9.

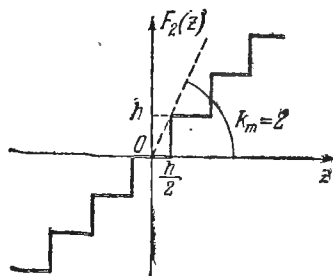


Рис. 8.10.

Обратимся к цифровой дискретной системе. Чтобы исследовать влияние квантования сигнала по уровню, положим, что этот процесс квантования представляет собой единственную нелинейность в системе. Схема системы изображена на рис. 8.9, где $F_2(z)$ имеет вид, показанный на рис. 8.10. Аналогична и характеристика $F_1(q)$. Блоки $F_2(z)$ и $F_1(q)$ работают синхронно и синфазно. Поскольку величина k_m , ограничивающая нелинейную характеристику сверху, в данном случае (рис. 8.10) равна 2, то достаточное условие абсолютной устойчивости (8.1) при устойчивой непрерывной части $W(q)$ примет здесь вид

$$\frac{1}{2} + \operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}, 0) > 0. \quad (8.2)$$

Если необходимо определить граничный (по условиям устойчивости) общий коэффициент усиления непрерыв-

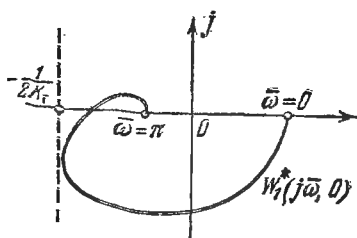


Рис. 8.11.

ной части, следует его выписать в выражении $W^*(j\bar{\omega}, 0)$ в явном виде, а именно

$$W^*(j\bar{\omega}, 0) = KW_1^*(j\bar{\omega}, 0).$$

Тогда условие абсолютной устойчивости (8.2) примет вид

$$\frac{1}{2K} + \operatorname{Re} W_1^*(j\bar{\omega}, 0) > 0.$$

Отсюда граничный коэффициент усиления K_r определится, как показано на рис. 8.11.

§ 8.3. Одночастотные периодические колебания в нелинейных дискретных системах

Не касаясь сложных форм колебаний в нелинейных дискретных системах, обратимся к определению только одночастотных симметричных периодических процессов. Рассмотрим дискретную систему с нелинейным амплитудно-импульсным элементом при отсутствии внешнего воздействия (рис. 8.5). Точное решение задачи сложно. Поэтому обратимся к приближенному методу гармонической линеаризации.

Допустим, что непрерывная (линейная) часть системы обладает необходимым свойством фильтра, т. е.

$$\left| W^*\left(j\frac{\pi}{N}, 0\right) \right| \gg \left| W^*\left(j\frac{k\pi}{N}, 0\right) \right| \quad (k = 2, 3, \dots, 2N-1),$$

где N — полупериод искомого колебания, выраженный числом периодов чередования импульсов. Здесь указано конечное число гармоник, так как дискретная система имеет свойство переводить все частоты в диапазон $0 \leq \bar{\omega} \leq \pi$ (см. § 10.2 в [23]). Решение для периодических колебаний приближенно ищется в виде

$$x[n, 0] = a \cos\left(\frac{\pi}{N} n + \varphi\right). \quad (8.3)$$

Гармонический коэффициент усиления нелинейного элемента вычисляется по формуле

$$q^*(a, \varphi, N) = \frac{1}{Na} \sum_{n=0}^{2N-1} F\left(a \cos\left(\frac{\pi}{N} n + \varphi\right)\right) e^{-j\left(\frac{\pi}{N} n + \varphi\right)}. \quad (8.4)$$

Условием возникновения симметричных колебаний на основании аналога критерия Найквиста [23] является

равенство

$$W^*\left(j\frac{\pi}{N}, 0\right) q^*(a, \varphi, N) = -1,$$

или

$$W^*\left(j\frac{\pi}{N}, 0\right) = -\frac{1}{q^*(a, \varphi, N)}. \quad (8.5)$$

Это уравнение решается графически в отдельности для каждого значения N . Следовательно, мы задаемся различными частотами π/N колебаний и для каждой из них находим амплитуду a и фазу φ . Результат расчета покажет, какие частоты колебаний π/N могут в данной системе иметь место.

Итак, на комплексной плоскости (рис. 8.12) строим кривую $W^*\left(j\frac{\pi}{N}, 0\right)$, вдоль которой ставим отметки разных целочисленных значений N . Затем задавшись некоторым значением N (например, $N=3$), строим серию кривых $-1/q^*$ для разных значений φ . Вдоль этих кривых ставим отметки значений амплитуды колебаний a . Искомое решение (a, φ) даст та из кривых $-1/q^*$, которая пройдет через точку кривой $W^*\left(j\frac{\pi}{N}, 0\right)$, соответствующую заданному N . Если такое пересечение отсутствует, то периодические колебания с частотой π/N при данном N не существуют. Аналогичное построение повторяется и для других значений N .

Если ввести в рассмотрение *псевдочастоту* (понятие «псевдочастота» рассматривалось в [23]), то можно воспользоваться логарифмическими частотными характеристиками приведенной непрерывной части. Аналогично определению автоколебаний в непрерывных нелинейных системах (§ 4.3) здесь можно использовать и критерий Михайлова для дискретных систем (см. [23]).

Одночастотные периодические колебания, которые рассмотрены в данном параграфе, аналогичны автоколебани-

Кривые $-1/q^$ для разных φ при заданном N*

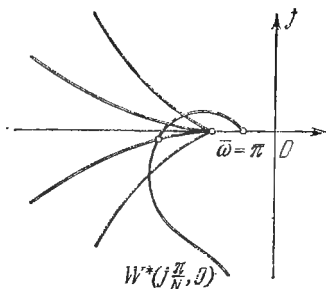


Рис. 8.12.

ям. Однако этот термин к ним, строго говоря, неприменим, так как эти колебания не чисто автономные; это колебания с принужденной частотой, кратной частоте следования импульсов. И недаром в расчете задаются разные N , а вычисляются a и φ , в отличие от расчета автоколебаний (см. гл. 4). Однако чисто условно термин «автоколебания» можно применять и здесь.

Пример. Пусть в схеме системы рис. 8.5 внешнее воздействие отсутствует ($g = 0$) и дано

$$W(q) = k_1 \frac{\beta}{q + \beta},$$

длительность импульсов $\gamma = 1$. Тогда (см. [23])

$$W^*(j\bar{\omega}, 0) = k_1 \frac{1 - e^{-\beta}}{e^{-j\bar{\omega}} - e^{-\beta}}.$$

Если нелинейность, указанную на рис. 8.5, описать выражением $F(x) = x - kx^3$, то для нее при $N = 2$ имеем

$$q^* = 1 - \frac{a^2}{4} (3 + e^{-j4\varphi}),$$

а при $N = 3$ и $N = 4$

$$q^* = 1 - \frac{3}{4} a^2.$$

Следовательно, для $N = 2$ получаем графическое решение в виде, представленном на рис. 8.13, а одночастотных колебаний с полупериодами $N = 3$ и $N = 4$ не существует (так как для них гармонический коэффициент усиления q^* должен быть вещественным); поэтому линия $-1/q^*$ с кривой $W^*(j \frac{\pi}{4}, 0)$ не пересекается.

Если же нелинейность $F(x)$ имеет вид релейной характеристики $F(x) = \text{sign } x$, то для N четного

$$q^* = \frac{2}{aN} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2N}} e^{-j\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2N}\right)},$$

а для N нечетного

$$q^* = \frac{2}{aN} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2N}} \begin{cases} e^{-j\varphi} & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2N}, \\ e^{-j\left(\varphi \pm \frac{\pi}{N}\right)} & \text{при } \frac{\pi}{2N} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{N}. \end{cases}$$

Здесь возможны одночастотные перпериодические колебания с разными частотами. Случай $N=2$ представлен на рис. 8.14.

Периодические колебания могут возникать и в цифровой системе как следствие квантования сигнала по уровню, если в этой системе не выполняется условие абсолютной устойчивости, рассмотренное в предыдущем параграфе. Приблизительно одночастотные симметричные колебания в цифровой системе определяются тем же методом гармонической линеаризации. Для цифровой системы (рис. 8.9) периодические колебания ищутся в виде

$$z[n, 0] = a \cos\left(\frac{\pi}{N} n + \varphi\right)$$

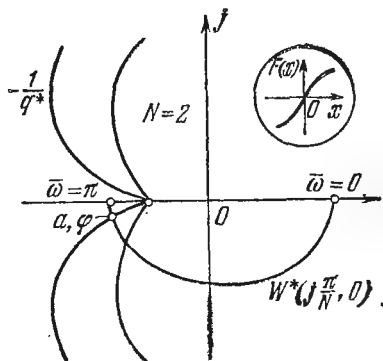


Рис. 8.13.

на основании прежнего графического способа решения уравнения

$$W^*(j\bar{\omega}, 0) = -\frac{1}{q^*(a, \varphi, N)}. \quad (8.6)$$

Поэтому здесь необходимо найти лишь выражение q^* для ступенчатой нелинейности квантования $F_2(z)$ (рис. 8.10). Эту нелинейную характеристику записывают в виде

$$F_2(z) = \sum_{i=1}^p \psi_i(z),$$

где p — число разрядов,

$$\psi_i(z) = \begin{cases} h & \text{при } z > \frac{2i-1}{2} h, \\ 0 & \text{при } |z| \leq \frac{2i-1}{2} h, \\ -h & \text{при } z < -\frac{2i-1}{2} h. \end{cases}$$

Вследствие этого гармонический коэффициент усиления здесь

$$q^* = \sum_{i=1}^p q_i^*,$$

причем каждая из его составляющих q_i^* вычисляется по формуле (8.4). В результате получаем

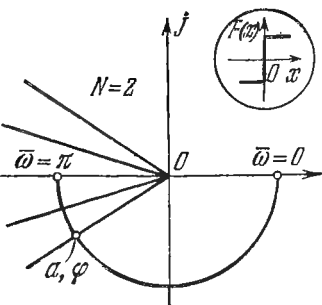


Рис. 8.14.

$$q^* = \frac{2h}{Na} \sum_{i=1}^p \frac{\sin \frac{\pi}{2N} (k_{1i} + k_{2i} + 1)}{\sin \frac{\pi}{2N}} \times e^{-j \left[\frac{\pi}{2N} (k_{1i} - k_{2i}) + \varphi \right]},$$

где

$$k_{1i} = \frac{N}{\pi} \left(\arccos \frac{2i-1}{2} \frac{h}{a} + \varphi \right),$$

$$k_{2i} = \frac{N}{\pi} \left(\arccos \frac{2i-1}{2} \frac{h}{a} - \varphi \right),$$

причем берется целая часть числа k_{1i} и k_{2i} .

Графическое решение уравнения (8.6), определяющее величины a и φ для каждого заданного N , показано на рис. 8.12.

Для того чтобы в цифровой системе вида рис. 8.9 не возникали периодические колебания, нужно проектировать систему так, чтобы удовлетворялось условие (8.2) абсолютной устойчивости системы.

В общем случае задача определения колебательных процессов в нелинейных импульсных и цифровых системах является весьма сложной. Мы остановились в этом параграфе только на простейших случаях одночастотных колебаний, когда можно удобным графическим методом приближенно найти амплитуду и фазу колебаний на разных возможных частотах. Для простейших случаев существует также и точный метод определения параметров колебаний.

Еще более тонким является вопрос определения вынужденных колебаний в импульсных и цифровых системах. Этот вопрос имеет ряд специфических особенностей по сравнению с вынужденными колебаниями непрерыв-

ных систем, в частности вследствие паличия принужденного темпа квантования сигнала по времени, присущего внутреннему контуру системы. Мы видели, что это обстоятельство существенно отражается на характере собственных колебаний системы. Аналогично обстоит дело и с вынужденными колебаниями; но рассмотрение этого интересного вопроса выходит за рамки данного пособия.

§ 8.4. Коррекция систем управления с ЦВМ

Как следует из вышензложенного, квантование сигнала по уровню в цифровых автоматических системах приводит к возможности возникновения периодических колебаний. При синтезе систем управления с ЦВМ в большинстве случаев ставится задача ввести такие корректирующие устройства, чтобы исключить возникновение периодических режимов при заданных нормальных условиях работы системы.

Будем считать, что процесс квантования сигнала по уровню составляет единственную существенную нелинейность системы в целом. Тогда структура системы управления состоит из линейной импульсной части и нелинейного элемента, соответствующего квантованию сигнала по уровню (рис. 8.15).

В этом случае задачу коррекции цифровой системы с целью исключения периодических режимов можно поставить следующим образом. Определить для частотных характеристик линейной импульсной части системы запретные области, при попадании в которые этих характеристик в системе возникают периодические колебания. Корректирующие устройства должны деформировать частотные характеристики линейной импульсной части системы таким образом, чтобы они не попадали в указанные запретные зоны.

При таком подходе должна быть выработана типовая желаемая частотная характеристика линейной импульсной системы, удовлетворяющая заданным требованиям

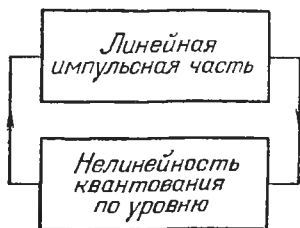


Рис. 8.15.

качества процессов управления (аналогично тому, как это делалось для обычных линейных систем). Спроектировав по этой желаемой частотной характеристике корректирующее устройство, необходимо затем проверить расположение характеристики относительно запретной зоны и, если надо, провести дополнительную коррекцию. Такая процедура вполне аналогична рассмотренной выше в § 7.1 при введении линейной коррекции в нелинейные системы с непрерывной линейной частью.

Корректирующие устройства в системах управления с ЦВМ могут быть как непрерывными, так и дискретными. Непрерывные линейные корректирующие устройства могут быть любого вида, как и в обычных линейных системах [23], т. е. последовательные (с интегрированием и дифференцированием ошибки), параллельные (в форме различных видов местных обратных связей) и комбинированные (с коррекцией по внешнему воздействию). Дискретные корректирующие устройства различных видов могут быть реализованы непосредственно в алгоритмах работы ЦВМ без дополнительных устройств или же в виде специальных дискретных фильтров. В дискретных корректирующих устройствах могут быть осуществлены аналоги всех видов непрерывных линейных корректирующих устройств, указанных выше. Могут использоваться, конечно, также нелинейные и псевдолинейные корректирующие устройства. Но здесь мы обратимся лишь к линейным.

Синтез линейных корректирующих устройств для цифровых систем удобно проводить, как и для непрерывных систем, с помощью логарифмических частотных характеристик. Напомним ([23], гл. 10), что логарифмические частотные характеристики импульсных систем строятся с использованием псевдочастоты

$$\omega^* = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2}, \quad \bar{\omega} = T\omega. \quad (8.7)$$

Логарифмическая частотная характеристика линейной импульсной системы только в высокочастотном диапазоне отличается существенно от логарифмической частотной характеристики приведенной непрерывной части этой системы. В низкочастотном диапазоне обе эти характеристики практически совпадают и незначительно отлича-

ются в среднечастотном диапазоне. На рис. 8.16 показан пример желаемой логарифмической амплитудной частотной характеристики для приведенной непрерывной части с астатизмом первого порядка (рис. 8.16, а) и для линейной импульсной части системы (рис. 8.16, б). В первом случае по оси абсцисс откладывается обычная частота ω , а во втором — псевдочастота ω^* в логарифмическом масштабе. По осям ординат отложены соответственно

$$L_m(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| \quad \text{и} \quad L_m^*(\omega^*) = 20 \lg |\bar{W}_w(j\omega^*)|$$

в децибелах, причем индекс w обозначает использование модифицированного w -преобразования [23].

Как и при синтезе непрерывных линейных систем, низкочастотная часть желаемой характеристики опреде-

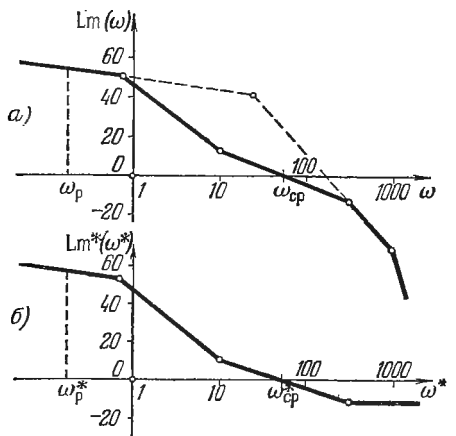


Рис. 8.16.

ляется требованиями точности воспроизведения входного задающего воздействия. Среднечастотная часть формируется в связи с требованиями качества переходного процесса. Что же касается высокочастотной части характеристики, то она не имеет существенного влияния на качество процесса управления. Поэтому она не корректируется, а остается такой, какая получилась в исходной системе. Штриховой линией на рис. 8.16, а показана корректируемая часть исходной характеристики. Кроме

того, вся исходная характеристика здесь подята па величину k_n (т. е. коэффициента усиления последовательного корректирующего устройства), чтобы обеспечить требуемую точность системы (см. [23], гл 6).

Требуемый коэффициент усиления выбирается, как обычно, по допустимой амплитудной ошибке на «рабочей» частоте ω_p . При этом период дискретности T (период следования импульсов) должен выбираться так, чтобы

$$\omega_p < \frac{1}{T} \quad (8.8)$$

иначе невозможно обеспечение требуемой точности в системе управления с ЦВМ. Кроме того, условие (8.8) необходимо и для обеспечения взаимной близости логарифмических частотных характеристик, изображенных на рис. 8.16.

Для среднечастотной части, исходя из требований качества переходного процесса, как обычно, определяется величина частоты среза ω_* и дается рекомендуемый наклон характеристик — 20 децибел на декаду.

Синтез непрерывных корректирующих устройств близок к обычному. При синтезе же дискретных корректирующих устройств, особенно в случае их реализации в алгоритмах работы ЦВМ, необходимо учитывать дополнительно целый ряд специфических особенностей. Расчет как непрерывных, так и дискретных корректирующих устройств с учетом этих особенностей изложен в книге [3].

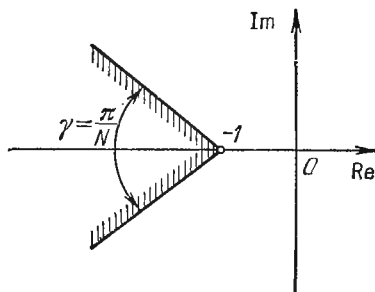
Обратимся теперь к построению запретных областей для частотных характеристик линейных импульсных частей цифровых систем управления с точки зрения исключения возникновения периодических режимов.

Согласно уравнению (8.5) периодические режимы определяются пересечением амплитудно-фазовой частотной характеристики $W^*\left(j \frac{\pi}{N}, 0\right)$, с годографом обратной гармонически линеаризованной характеристики нелинейного элемента — $1/q^*(a, \varphi, N)$ в точке, соответствующей данному N . Для нелинейного элемента, отражающего процесс квантования сигнала по уровню, указанные годографы лежат в секторе с углом раствора $\gamma = \pi/N$ (рис. 8.17).

В соответствии с этим на рис. 8.18 построены запретные области для фазовой частотной характеристики $\varphi^*(\omega^*)$. Высота запретной зоны над линией -180° зависит от частоты исследуемого периодического колебания, которая равна $1/NT$. Чтобы исключить данный периодический режим, фазовая частотная характеристика $\varphi^*(\omega^*)$ при величине псевдочастоты

$$\omega^* = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2N}$$

Рис. 8.17.



не должна попадать в запретную зону, соответствующую тому же значению N .

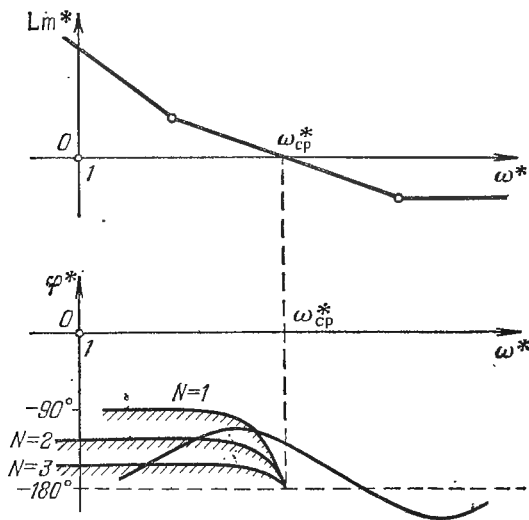


Рис. 8.18.

В цифровых системах управления могут возникать и более сложные случаи так называемых квазипериодических колебаний [3].

В заключение надо отметить, что в большинстве систем управления с ЦВМ стремятся к тому, чтобы выбрать параметры системы, период квантования и число разрядов таким образом, чтобы цифровую часть системы можно было рассматривать как линейную импульсную систему, близкую к непрерывной (без существенного влияния квантования по уровню), а иногда даже в первом приближении как непрерывную, хотя это и не всегда возможно.

§ 8.5. Особенности систем автоматического управления с ЦВМ

Выше были рассмотрены лишь некоторые частные вопросы, относящиеся к динамике систем управления с ЦВМ. Однако целесообразно дать так же и общее представление об этом важнейшем в настоящее время виде автоматического управления.

При современном развитии техники все более широкий круг задач ставится перед системами автоматического управления и вместе с тем все более широкий круг технических объектов и технических комплексов во всех отраслях народного хозяйства приходится автоматизировать, создавая сложные автоматизированные человеко-машинные комплексы, а также полностью автоматические системы регулирования и управления. При этом характерным является усложнение функций автоматических систем, повышение требований к их точности и надежности, к легкости перенастройки программ управления, необходимость организации централизованного управления одновременно многими взаимосвязанными объектами и т. п.

Все это приводит к нецелесообразности «нагромождения» традиционных элементов автоматики и отдельных регуляторов с устройствами связи и согласования, объединяющими их в единую систему. Введение ЦВМ в состав системы автоматического управления наилучшим образом решает указанные технические проблемы реализации многих современных систем.

Одним из определяющих факторов является успех миниатюризации устройств вычислительной техники, появление интегральных схем и микропроцессорных си-

стем. Позтому удается в малых габаритах и весах реализовать сложные законы (алгоритмы) управления с обработкой большого количества исходной информации. В одной и той же ЦВМ можно заложить различные программы управления и менять их по мере необходимости в процессе эксплуатации. Большое значение для современной автоматики имеют также широкие возможности выполнения ЦВМ различных логических операций наряду с вычислительными.

С использованием ЦВМ исключаются трудные для традиционной автоматики вопросы увязки между собой большого числа отдельных устройств, каналов и каскадов при формировании более или менее сложных систем управления. Облегчается борьба с источниками ошибок, разброса параметров и многих других недостатков, присущих традиционным автоматическим системам.

Наряду с этим при использовании ЦВМ лучше решаются вопросы проверки исправного действия системы и задача автоматического поиска неисправностей для их устранения.

Теперь уже можно говорить о том, что во многих случаях системы автоматического управления с ЦВМ становятся более выгодными по габаритам и весам, чем непрерывные системы, построенные на традиционных элементах автоматики, при выполнении тех же функций управления. Это особенно важно для бортовых ЦВМ в системах управления различного рода движущимися объектами.

В сложных системах для решения задач управления не обязательно ставить одну многофункциональную ЦВМ. Часто более целесообразным является применение нескольких специализированных микропроцессорных устройств в разных частях системы. Такие вычислители могут быть органически встроены в отдельные блоки системы. Это позволяет, кстати, развить модульный принцип построения систем автоматического управления, когда различные сложные системы управления смогут быть сформированы как разные комбинации из набора унифицированных цифровых блоков, единых для самых различных областей применения автоматических систем.

Такой подход весьма целесообразен для построения систем управления движущимися объектами, для авто-

математического управления энергетическими системами, для автоматизации производственных процессов, для построения робототехнических систем самого различного назначения и т. п.

Решающую роль ЦВМ играют также в системах автоматизированного проектирования любых технических агрегатов, в том числе и самих систем автоматического управления.

Использование ЦВМ в системах автоматического управления совершенно по новому ставит ряд вопросов, связанных с формированием законов управления, благодаря чему и появился более широкий новый термин «алгоритмы управления». При этом не только снимаются трудности реализации нелинейных и логических законов управления, но и появляются принципиально новые алгоритмы, предусматривающие специальную обработку информации, придающие новые свойства и реализующие новые функции системы.

В частности, это касается создания систем с нелинейной и псевдолинейной коррекцией, самонастраивающихся и самоорганизующихся систем, адаптивных систем с более широкими возможностями, вплоть до реализации в перспективе систем управления с элементами искусственного интеллекта, например, в робототехнических комплексах.

Далее, в заключительной главе книги будут даны начальные понятия о самонастраивающихся системах, об их назначении, основных принципах построения и функционирования.

§ 9.1. Виды самонастраивающихся систем

Процесс проектирования автоматической системы, вытекающий из рассмотренного ранее материала по линейным [23] и нелинейным системам, предполагает, что известны параметры объекта управления, внешние воздействия, режимы работы. В результате будут определены структура и все параметры системы управления, удовлетворяющие заданным требованиям к точности и качеству процесса управления.

Однако не всегда существует такая определенность всех указанных факторов. Часто знание параметров объекта управления, а иногда и структуры его математического описания, не является достоверным, т. е. они известны или приближенно или некоторые параметры даже полностью неизвестны. Могут быть также случаи, когда в объекте с переменными параметрами хорошо определены их значения в начальном состоянии, но законы изменения параметров объекта в процессе эксплуатации (или движения) известны плохо. А требования к качеству процесса управления, допустим, ставятся высокие. В этих случаях при проектировании невозможно создать хорошую систему управления с определенными параметрами, а иногда бывает невозможно точно определить даже и рациональную структуру системы управления.

Тогда возникает необходимость создать не обычную систему автоматического управления, а такую систему, в которой параметры (а иногда и структура) автоматически настраивались бы таким образом, чтобы фактически получающийся в ходе эксплуатации (или движения) процесс управления удовлетворял заданным требованиям. Для этого необходимо в дополнение к обычному замкнутому контуру системы управления вводить добавочное устройство, которое реагировало бы на определенные фак-

торы, характеризующие систему, или на тот или иной показатель качества процесса управления, с тем, чтобы соответственно изменять некоторые параметры регулятора (например, коэффициент усиления) или даже его структуру так, чтобы процесс управления получал требуемое качество. Такие системы управления называются *самонастраивающимися системами*. Самонастраивающиеся системы, автоматически формирующие структуру регулятора в процессе эксплуатации, имеют еще специальное название — *самоорганизующиеся системы*. При этом в них может автоматически формироваться и алгоритм управления (закон регулирования).

Самонастраивающиеся системы могут служить и другим целям. Кроме неизвестных параметров объекта, на поведение системы оказывают влияние и внешние воздействия как задающие (в системах слежения), так и возмущающие, в том числе различные виды помех. При больших диапазонах изменения внешних воздействий или при значительной их неопределенности также бывает целесообразным вводить самонастройку параметров (и структуры) системы управления. Это может делаться уже не по внутренним факторам и не по показателю качества (что труднее), а непосредственно — по более быстрой реакции на сами возмущающие и задающие воздействия. Для этого потребуются устройства самонастройки иные, чем в описанном выше случае.

То же самое касается и неопределенности режимов работы объекта, которыми надо управлять. Возможно, что режимы работы системы будут зависеть от ряда разнообразных условий, меняющихся в процессе эксплуатации (или движения в какой-либо среде) или же просто заранее непредсказуемых. Тогда понадобятся иного рода устройства самонастройки, реагирующие на указанные условия и обстановку действия системы.

Наконец, могут быть случаи, когда удовлетворение предъявленным к системе высоким требованиям точности и качества будет сопряжено с высокой точностью изготовления элементов системы управления и их стабильностью, которые, допустим, оказываются недостижимыми или слишком дорогостоящими при современном уровне технологии производства. Тогда введение самонастройки параметров системы управления может позволить достичь

желаемого качества процесса управления при значительном снижении технологических требований к элементам по точности и стабильности в изменяющихся либо резко необычных условиях эксплуатации, либо после длительного хранения, повлиявшего на свойства элементов. Возможны и многие другие случаи, когда автоматические системы должны быть самонастраивающимися.

Самонастраивающиеся системы являются одной из разновидностей *адаптивных систем* автоматического управления. *Адаптация* является несколько более общим понятием, чем *самонастройка*. Адаптация означает, что в процессе достижения поставленной цели управления система самоприспосабливается к условиям среды, к окружающей обстановке, к неизвестным объектам и неизвестным путям движения к цели. Система распознает обстановку, объекты, отыскивает пути и принимает решение о своем дальнейшем поведении при осуществлении заданной цели управления. При этом система может обладать свойством самообучения, запоминания накопленного опыта действий в различных ситуациях с последующей реализацией запомненного при повторении этих ситуаций.

Поэтому адаптивные системы автоматического управления самоприспосабливаются в процессе своего действия не только путем самонастройки параметров и структуры системы, но и более широким арсеналом способов, вплоть до использования возможностей искусственного интеллекта. В данном учебном пособии мы ограничимся только обсуждением самонастраивающихся систем.

Итак, самонастраивающаяся система автоматического управления по сравнению с обычными системами, изучавшимися ранее, обладает специальным добавочным контуром самонастройки. Этот контур самонастройки может быть разомкнутым или замкнутым. Например, когда самонастройка производится по какому-либо показателю качества процесса управления $x(t)$ (рис. 9.1), текущее значение которого определяется в процессе работы системы, получается *замкнутый контур самонастройки* (он реагирует на результат своего действия).

Контур самонастройки будет *разомкнутым*, если он не связан с измерением сигналов основного контура управления, а реагирует на косвенные величины $z(t)$, от которых зависят параметры объекта (например, скоростной

напор, число Маха в летательных аппаратах) (рис. 9.2). Аналогично, если самонастройка производится по свойствам внешних воздействий: задающего $g(t)$ или возмущающего $f(t)$ (рис. 9.3), то контур самонастройки разомкнут — он не реагирует на получаемый результат самонастройки. При самонастройке по режиму работы

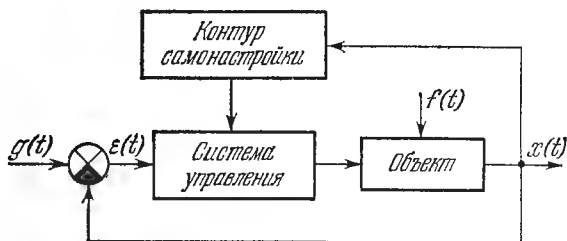


Рис. 9.1.

системы контур самонастройки может быть либо замкнутым, либо разомкнутым в зависимости от того, на какой исходный фактор в системе он реагирует.

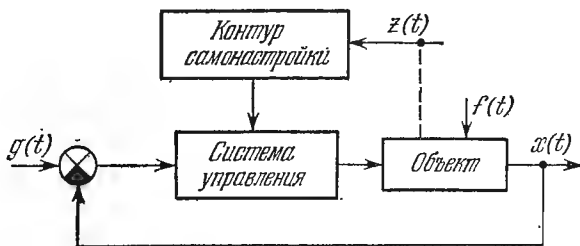


Рис. 9.2.

Система самонастройки по двум или нескольким факторам может иметь ряд контуров, замкнутых и разомкнутых. Процесс самонастройки состоит из следующих этапов:

- а) определение (измерение, вычисление) исходного фактора для самонастройки;
- б) идентификация (определение основных параметров или характеристик, необходимых для самонастройки);

в) формирование воздействия на настраиваемую часть системы управления;

г) изменение какого-либо параметра или структуры этой части системы.

На первом этапе а) процесса самонастройки измеряется какая-либо переменная, например сама выходная величина $x(t)$ или частота ее колебаний, или декремент

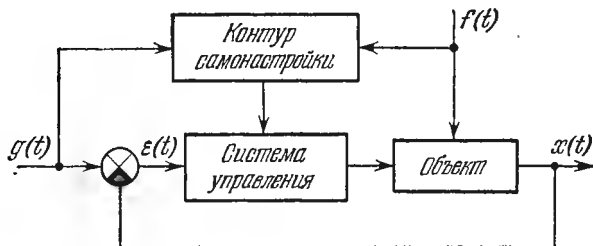


Рис. 9.3.

затухания, или, в других случаях, величины $g(t)$, $f(t)$, их частоты, порядок величин и т. п. Измеренная величина может непосредственно служить исходным фактором для самонастройки или же последний вычисляется на основании данных измерений. Это зависит от критерия, избранного для самонастройки.

Второй этап б) — идентификация — в простейших случаях может содержать лишь сравнение фактического значения исходного фактора, найденного в элементе а), с эталонным. Но во многих случаях идентификация включает более или менее сложные вычислительные операции с временными, частотными или статистическими характеристиками процесса, внешних воздействий или свойств среды с целью определения параметров объекта, координат состояния или других факторов.

Третий этап в) состоит в определении того, насколько надо изменить определенный параметр системы управления или как переформировать структуру системы, чтобы привести характеристики системы к эталонным или нужным образом учесть изменившиеся внешние воздействия или свойства среды и другие факторы. В результате подается соответствующий корректирующий сигнал в настраиваемую часть системы.

Наконец, четвертый этап г) состоит в реализации изменения параметра или структуры настраиваемой части системы в соответствии с указанным корректирующим сигналом.

Описанная схема процесса самонастройки лишь примерно отражает функционирование контура самонастройки в общей форме. Конкретные же системы могут быть

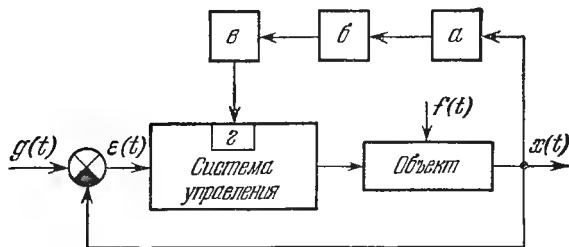


Рис. 9.4.

весьма различными. Контур самонастройки может включать в себя действительно четыре устройства, соответствующие указанным выше элементам процесса самонастройки (рис. 9.4 и 9.5). Однако структурно эти элементы

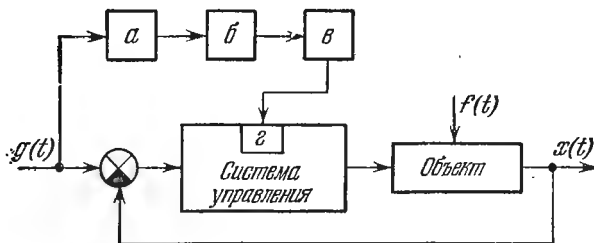


Рис. 9.5.

могут как объединяться, так и расчленяться. Элемент идентификации может иметь дополнительную структурную единицу — выработку эталона или динамическую модель (рис. 9.6 блок д).

Далее, существенным является способ выявления исходного фактора для самонастройки: с помощью подачи

специального пробного воздействия на систему управления (на объект) или же путем анализа естественного хода процесса управления; путем поиска экстремального значения показателя качества как критерия самонастройки или же путем беспойскового определения (вычисления) критерия самонастройки. В связи с этим различают *поисковые* и *беспойсковые* самонастраивающиеся системы. Применяются также термины: *экстремальные системы* и *аналитические самонастраивающиеся системы*.

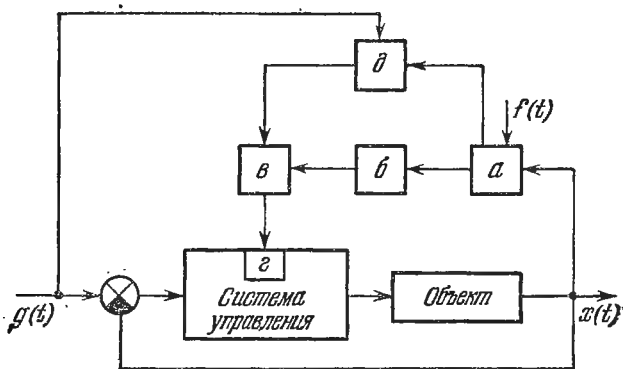


Рис. 9.6.

Мы рассмотрели общие понятия о самонастраивающихся системах, характеризующихся в дополнение к основному замкнутому контуру автоматического управления наличием специального добавочного контура самонастройки. Такие системы называют иногда *системами с активной самонастройкой*. Существует, однако, ряд систем автоматического управления и регулирования, не имеющих специального добавочного контура самонастройки, но по существу обладающих некоторыми свойствами самонастраивающихся систем. Такие системы называются *системами с пассивной самонастройкой* или *системами, эквивалентными самонастраивающимся*. К последним принадлежат, например, системы с нелинейными корректирующими устройствами (см. гл. 7) и системы с переменной структурой. В этих системах автоматически меняются параметры закона управления (по нелинейным

зависимостям) при изменении размера ошибки регулирования или в зависимости от определенной совокупности координат состояния системы. Кроме того, в них можно автоматически стабилизировать необходимые частотные свойства системы при переменных параметрах объекта или при наличии дестабилизирующего влияния неизбежно присущих системе вредных нелинейностей.

Нелинейные системы, в которых организуется скользящий процесс, также являются системами, эквивалентными самонастраивающимся. В них, как мы видели, в идеале достигается полная независимость, а практически — слабая зависимость динамических свойств системы от переменных параметров объекта даже при существенном их изменении. Наконец, к пассивной самонастройке можно отнести и свойство нелинейных систем, заключающееся в существенном различии их динамического поведения в быстрых и медленных составляющих процесса (см. гл. 6). Это используется в инженерной практике для придания желаемых свойств системе в основной медленной составляющей процесса управления, в частности путем организации определенных колебаний быстрой составляющей (например, вибрационное сглаживание нелинейностей). Система может быть построена так, что быстрая часть движения будет определяться главными переменными параметрами системы, а основная медленная часть процесса будет иметь почти неизменные требуемые характеристики. Практическое значение различных систем, эквивалентных самонастраивающимся (т. е. систем с пассивной самонастройкой) весьма велико, так как в них «самонастройка» происходит в темпе самого процесса управления, в то время как в активных самонастраивающихся системах (рис. 9.1—9.6) часто возникают большие трудности создания быстродействующего контура самонастройки. Высокое быстродействие контура самонастройки требуется потому, что надо успеть перенастроить параметры основного контура управления раньше, чем в нем закончится данный переходный процесс (или же существенно изменится поведение системы). Это касается особенно систем с замкнутым контуром самонастройки (рис. 9.1, 9.4) и в значительно меньшей степени — с разомкнутым контуром (рис. 9.2, 9.3, 9.5), когда не требуется анализа свойств процесса $x(t)$. Системы само-

пастройки с моделью (рис. 9.6) во многих случаях обладают преимуществом в этом отношении.

Имеет смысл также создание систем, в которых основной контур управления обладает пассивной самонастройкой (за счет специальной нелинейности), а к нему добавляется дополнительный контур активной самонастройки.

§ 9.2. Системы с разомкнутой цепью самонастройки

Рассмотрим случай, когда самонастройка параметров системы управления производится не на основании анализа фактического процесса управления, а путем измерения каких-либо внешних факторов, влияющих на поведение системы, и последующего формирования (вычисления) сигналов для коррекции параметров системы управления (рис. 9.7).

В данной схеме под $f(t)$ подразумевается либо внешнее возмущающее воздействие (если его можно измерить),

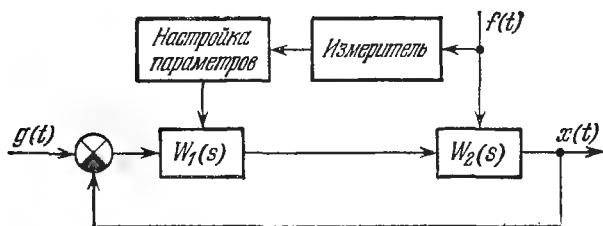


Рис. 9.7.

либо какие-то характеристики внешней среды, поддающиеся измерению. При этом можно измерять не непосредственно те исходные факторы, которые берутся в основу самонастройки, а некоторые вспомогательные величины, легко измеряемые, по которым можно вычислить указанные исходные факторы. То же самое относится и к косвенной идентификации параметров объекта. Например, при управлении полетом самолета по измерению уровня топлива в баках можно вычислять изменяющуюся массу самолета, которая входит в коэффициенты уравнения динамики управляемого объекта, а на основании этого можно подсчитать и необходимую коррекцию коэф-

фициента усиления автопилота со стороны контура самонастройки.

При управлении полетом с существенно изменяющейся высотой и скоростью полета в качестве измеряемых величин, влияющих на параметры управляемого объекта, могут быть взяты плотность воздуха ρ и скорость движения относительно воздушной среды v (рис. 9.8). От

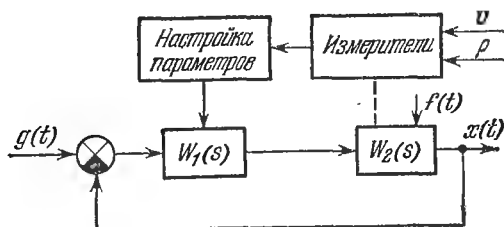


Рис. 9.8.

них зависят коэффициенты уравнения динамики объекта, а значит, могут быть вычислены и необходимые сигналы для коррекции параметров системы управления. В этих случаях в устройстве самонастройки параметров системы управления должен иметься компактный специализированный вычислитель.

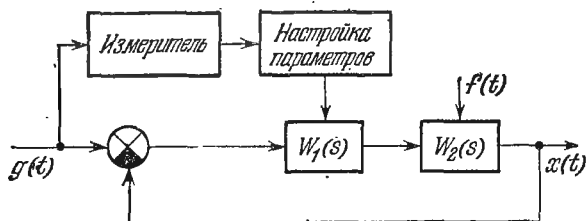


Рис. 9.9.

В системах слежения самонастройка такого типа может применяться для настройки параметров управляющего устройства по измерению входного воздействия $g(t)$ (рис. 9.9), если при широком диапазоне изменения $g(t)$ по величине или по спектру частот качественное слежение требует автоматического изменения параметров си-

системы в процессе работы или же если необходимо автоматически перенастраивать систему в связи с различными видами помех, поступающих на вход системы вместе с полезным сигналом $g(t)$.

Разомкнутая цепь самонастройки может быть применена в следящих системах и других автоматических системах еще в тех случаях, когда значительно меняется нагрузка на выходе, а характеристика исполнительного устройства смещается с увеличением нагрузки, как показано на рис. 9.10. Тогда необходимо, измеряя нагрузку, производить соответствующую перенастройку величины коэффициента усиления в управляющем устройстве системы, чтобы сохранить заданное качество процесса управления (рис. 9.11).

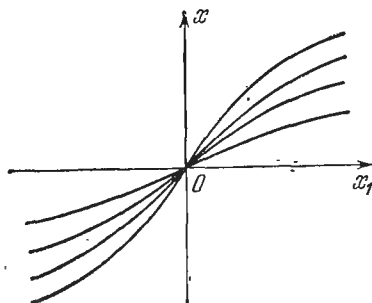


Рис. 9.10.

Основой самонастройки во многих из указанных случаев (рис. 9.7, 9.8, 9.11) может служить требование сохранения неизменной передаточной функции замкнутой системы (отвечающей заданному качеству процесса управления) при меняющихся по какой-либо причине параметрах объекта. Считая изменение параметров объекта $W_2(s)$ достаточно медленным, чтобы применять метод замороженных коэффициентов, запишем передаточную функцию замкнутой системы в обычной форме:

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s) W_2(s)}{1 + W_1(s) W_2(s)}. \quad (9.1)$$

Для неизменности $\Phi(s)$ требуется сохранять

$$W_1(s) W_2(s) = \text{const} = W_{10}(s) W_{20}(s),$$

т. е. передаточная функция управляющей части системы должна самонастраиваться в соответствии с формулой

$$W_1(s) = \frac{W_{10}(s) W_{20}(s)}{W_2(s)} \quad (9.2)$$

при меняющейся функции $W_2(s)$. Однако в системе измеряются, как говорилось выше, не сами параметры функции $W_2(s)$, а косвенные величины, влияющие на изменение этих параметров. Поэтому в контуре самонастройки должен иметься вычислитель, определяющий параметры

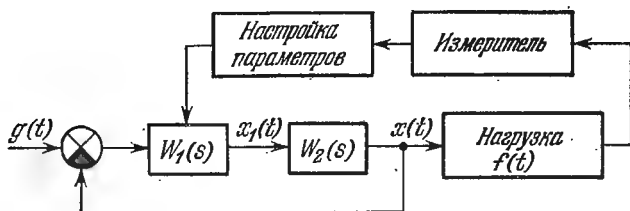


Рис. 9.11.

функции $W_2(s)$, а отсюда и функции $W_1(s)$, которую надо получить в результате самонастройки. В случае, если вычисления становятся слишком громоздкими, равенство (9.2) может выполняться с упрощениями приближенно, в пределах некоторой определенной полосы частот, свойственных системе (вблизи частоты среза логарифмических характеристик). В простейшем случае, когда в передаточной функции объекта

$$W_2(s) = \frac{K_2 N_2(s)}{L_2(s)}$$

меняется только коэффициент K_2 , формула (9.2) для самонастройки принимает вид

$$K_1 = \frac{K_{10} K_{20}}{K_2}, \quad (9.3)$$

где K_1 — коэффициент усиления управляющей части системы.

Что касается случая самонастройки по свойствам входного сигнала $g(t)$ (рис. 9.9), то здесь, считая, что $W_2(s)$ является передаточной функцией неизменяемой части системы, необходимо перенастраивать фильтры управляющей части $W_1(s)$ на наилучшее воспроизведение системой сигнала с данными (измеренными) свойствами или же на наилучшую «борьбу» с помехами, поступаю-

щими на вход. В этом случае за основу самонастройки берется получение желаемой логарифмической амплитудной характеристики, соответствующей данным свойствам $g(t)$ и требованиям к системе. В результате самонастройки будет автоматически осуществляться синтез корректирующего устройства частотным методом (см. гл. 6 в учебном пособии [23]) с упрощенными вычислениями.

§ 9.3. Самонастраивающиеся системы с моделью

Модель в самонастраивающихся системах представляет собой техническое устройство с такими динамическими свойствами, которые хотелось бы иметь в данной системе автоматического управления. Однако сама данная реальная система не обладает такими свойствами вследствие неопределенности или изменчивости параметров управляемого объекта. Модель должна быть подключена к системе таким образом, чтобы сообщить системе в целом свои качества.

Существуют различные способы подключения модели. Модель может помещаться в главной обратной связи си-

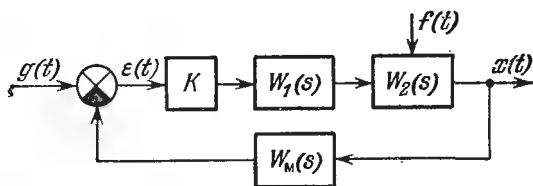


Рис. 9.12.

стемы (рис. 9.12). В этом случае передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид

$$\Phi(s) = \frac{KW_1(s)W_2(s)}{1 + KW_1(s)W_2(s)W_m(s)}.$$

Если коэффициент усиления K сделать достаточно большим, то получим $\Phi(s) \approx 1/W_m(s)$. Следовательно, при данном способе обратная передаточная функция модели $1/W_m(s)$ должна обладать желаемыми свойствами. Поэтому такую модель называют *инверсной моделью*.

Построение таких моделей встречается трудности, и может идти речь лишь о приблизительном осуществлении желаемых свойств в ограниченной полосе частот.

Более распространенным является включение модели параллельно основной системе по схемам, изображенным на рис. 9.13 и 9.14. В первой схеме (рис. 9.13) имеем

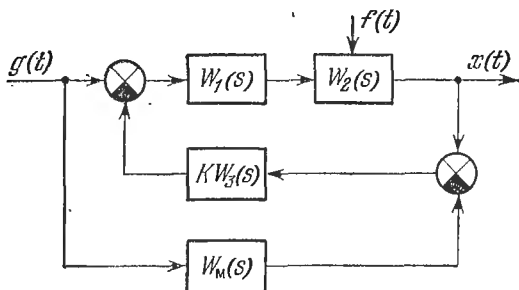


Рис. 9.13.

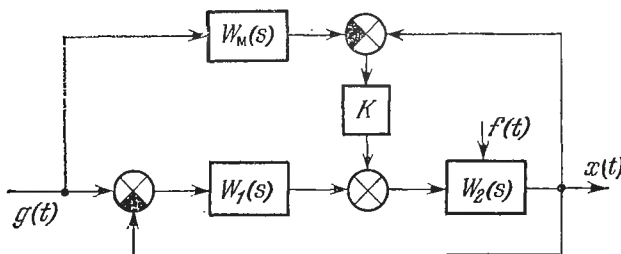


Рис. 9.14.

общую передаточную функцию замкнутой системы в виде

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s) W_2(s)}{1 + KW_1(s) W_2(s) W_3(s)} + \frac{KW_1(s) W_2(s) W_3(s) W_m(s)}{1 + KW_1(s) W_2(s) W_3(s)}.$$

Если сделать K достаточно большим, то первым слагаемым можно пренебречь целиком, а во втором слагаемом — пренебречь единицей в знаменателе. Тогда получаем $\Phi(s) \approx W_m(s)$, т. е. замкнутой системе в целом сообщаются приблизительно свойства модели, заранее рассчитан-

ные как желаемые. В результате поведение системы в динамических процессах управления становится весьма слабо зависящим от неопределенных или изменяющихся параметров объекта.

Для схемы на рис. 9.14 имеем

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) - K W_2(s) W_m(s)}{1 + W_1(s) W_2(s) - K W_2(s)}.$$

Здесь также видно, что при достаточно большом K последние слагаемые в числителе и знаменателе будут преобладать. В результате получим желаемое $\Phi(s) \approx W_m(s)$.

Существуют и другие способы подключения модели для самонастройки системы. Возможно использование

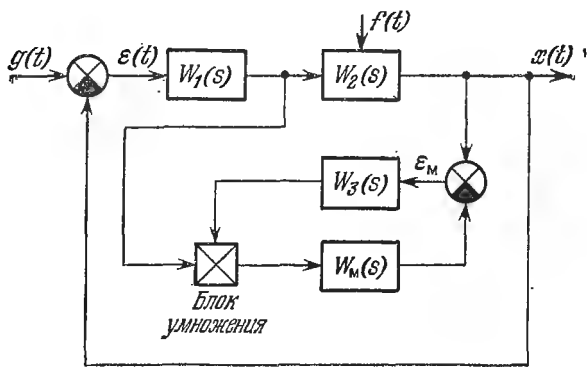


Рис. 9.15.

подстраиваемой модели (рис. 9.15) по определенному критерию на основе измерения рассогласования ε_m между величинами на выходе реального объекта $W_2(s)$ и модели $W_m(s)$. Алгоритм подстройки модели формируется в звене $W_3(s)$.

Во всех случаях изменения параметров объекта и модели считается применимым метод замороженных коэффициентов.

Идеализированный подход, использованный нами выше, может в конкретных случаях претерпеть существенные поправки в виде ограничения величины коэффициента усиления K из условия устойчивости системы.

Тогда соответственно снизится степень приближения свойств реальной системы к желаемым свойствам, заложенным в модель.

В системах управления, включающих в себя ЦВМ в контуре управления, модели могут программироваться в ЦВМ, причем система может корректироваться с большим разнообразием способов в различных конкретных приложениях.

§ 9.4. Системы с анализом процесса управления

Наиболее полно соответствующим идее функционирования самонастраивающейся системы является построение контура самонастройки на базе анализа фактически имеющего место в системе результата процесса управления $x(t)$ (рис. 9.16). Этот результат управления $x(t)$

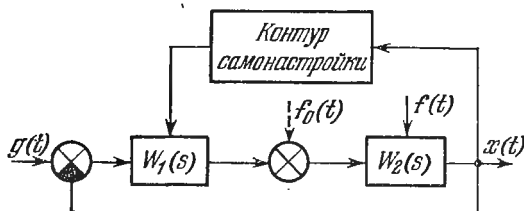


Рис. 9.16.

должен удовлетворять определенным требованиям в силу каких-либо качественных показателей (точности, качества, переходного процесса и т. п.). При неопределенности и изменчивости параметров объекта $W_2(s)$ управляющее устройство $W_1(s)$ с неизменными параметрами, очевидно, не сможет обеспечивать заданные качественные показатели процесса. Поэтому, анализируя фактически получающиеся качественные показатели процесса $x(t)$, нужно с помощью контура самонастройки так изменять параметры (а иногда и структуру) управляющего устройства $W_1(s)$, чтобы добиваться требуемого качества процесса $x(t)$.

В большинстве случаев для этой цели в состав контура самонастройки приходится включать вычислитель-

ное устройство. Как правило, самонастройка с анализом результата управления $x(t)$ оказывается значительно более сложной и менее быстродействующей, чем косвенные методы самонастройки, изложенные в предыдущих параграфах. Однако современный уровень миниатюризации элементной базы вычислителей позволяет реализовать многое в этом направлении совершенствования самонастраивающихся систем. Как уже отмечалось, в рассмотренном случае имеет место замкнутый контур самонастройки. Существует большое число вариантов построения таких самонастраивающихся систем. Они различаются выбором качественных показателей процесса $x(t)$ и методами его анализа, а также методами идентификации и способами настройки параметров (или структуры). При этом может анализироваться непосредственно реальный результат процесса управления $x(t)$ (*система без пробных воздействий*) либо (рис. 9.16) может анализироваться реакция объекта на специально подаваемый извне сигнал $f_0(t)$ (*система с пробным воздействием*).

Методы анализа могут быть детерминированными или статистическими. Самонастройка системы может производиться либо с целью удовлетворения некоторым заданным требованиям, либо с целью оптимизации системы по определенным критериям.

Рассмотрим лишь некоторые примеры из этой области. Здесь также будем считать, что переменность параметров объекта такова, что для процесса самонастройки справедлив метод замороженных коэффициентов.

В качестве первого примера возьмем систему с самонастройкой на основе анализа частотных характеристик (рис. 9.17). На входе и выходе объекта управления при наличии пробного гармонического сигнала $f_0(t)$ с несколькими частотами (в схеме на рис. 9.17 три частоты) или без него с помощью фильтров Φ_1, Φ_2, Φ_3 и $\Phi'_1, \Phi'_2, \Phi'_3$ выделяются гармонические составляющие по каждой из трех (в общем случае — нескольких) частот. В вычислителе определяются значения амплитудной частотной характеристики объекта на этих трех частотах и формируются сигналы для настройки соответствующих параметров управляющего устройства $W_1(s)$ так, чтобы система получила желаемые частотные свойства. Можно сказать, что в данной системе происходит идентификация неопреде-

ленных и изменяющихся свойств объекта по амплитудным частотным характеристикам и автоматический синтез корректирующих устройств частотным методом. Необходимо обеспечение устойчивости и приемлемого быстрого действия этого замкнутого контура самонастройки.

Следующим примером может служить самонастройка, основанная на анализе свойств переходного процесса на

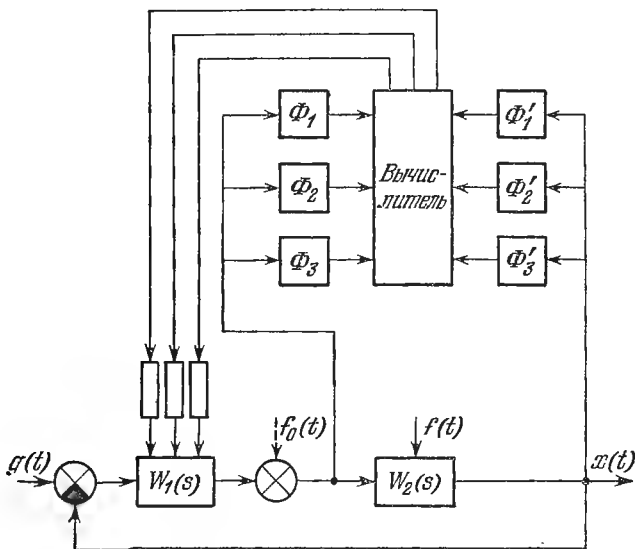


Рис. 9.17.

выходе объекта, получающегося в результате импульсного или ступенчатого воздействия $f_0(t)$ (рис. 9.16). Для этого могут быть использованы и естественные внешние воздействия, если они в определенном виде появляются в процессе эксплуатации системы. Исходной величиной для самонастройки могут быть различные характеристики переходного процесса (или весовой функции), например собственная частота, декремент затухания, квадратичная оценка. Контур самонастройки в этом случае должен состоять из специального измерителя, вычислителя-анализатора и устройства изменения параметров управляющей системы, например коэффициента усиления.

§ 9.5. Экстремальные системы

Самонастраивающаяся система, в которой подстройка параметров управляющего устройства производится не просто по заданному значению какого-либо показателя качества работы системы, а по экстремуму (максимуму или минимуму) этого показателя в процессе эксплуатации системы, называется *экстремальной системой*.

Создание таких систем имеет смысл в тех случаях, когда точка экстремума данного показателя качества, во-первых, не остается постоянной, а меняется в зависимости от изменения каких-либо внешних или внутренних факторов, характеризующих процесс эксплуатации системы; во-вторых, если эта точка экстремума достаточно четко выражена на кривой зависимости данного показателя качества от настройки управляющего устройства при изменении какого-либо эксплуатационного фактора. На рис. 9.18 показан пример таких зависимостей показателя качества $I(\mu)$ от настраиваемой величины при разных значениях указанного эксплуатационного фактора. Предполагается, что последний меняется настолько медленно, что его можно считать почти постоянным во время экстремальной настройки управляющей части по определенной кривой (рис. 9.18), соответствующей значению этого эксплуатационного фактора в данный момент.

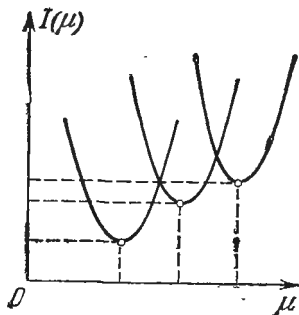


Рис. 9.18.

Определение фактического значения показателя качества I может быть связано с анализом рассогласования $\varepsilon(t)$ (рис. 9.19), когда, например, I — интегральный критерий качества процесса $\varepsilon(t)$, либо, как показано на рис. 9.20, — с анализом режима работы объекта, например, по минимуму расхода энергии $I(\mu)$ в зависимости от скорости движения (эксплуатационный фактор).

В простейших экстремальных регуляторах в качестве настраиваемой величины μ выбирается непосредственно регулирующее воздействие на объект. Тогда схема системы упрощается (рис. 9.21).

Экстремум показателя качества $I(\mu)$ при каждом данном значении эксплуатационного фактора определяется выражением $dI/d\mu = 0$. Поэтому поиск экстремума связан так или иначе с определением производной $dI/d\mu$ и движением в сторону уменьшения ее абсолютного

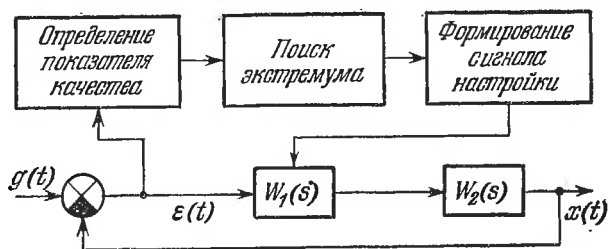


Рис. 9.19.

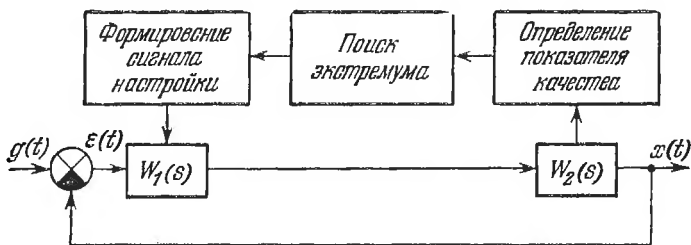


Рис. 9.20.

значения до нуля. Существует целый ряд конкретных способов организации и технической реализации такого поиска. Величина производной характеризует градиент функции $I(\mu)$, который определяется в реальной системе либо непосредственно нахождением производной, либо с помощью колебательного движения, в процессе которого выявляется направление в сторону уменьшения производной.

В общем случае в системе может быть несколько настраиваемых величин. Тогда имеем $I(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$,

и точка экстремума определится нулевым значением градиента

$$\text{grad } I = \left\{ \frac{\partial I}{\partial \mu_1}, \frac{\partial I}{\partial \mu_2}, \dots, \frac{\partial I}{\partial \mu_n} \right\}.$$

Для организации движения в сторону экстремума функции $I(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ применяются разные способы.

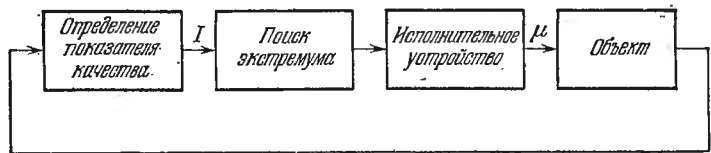


Рис. 9.21.

Из них наиболее распространены методы наискорейшего спуска, метод градиента, метод Гаусса — Зейделя, которые подробно описаны в литературе.

1. Андронов А. А. и др. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
2. Бабаков Н. А., Воронов А. А., Макаров И. М. и др. Теория автоматического управления, ч. 2.— М.: Высшая школа, 1977.
3. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы.— М.: Наука, 1976.
4. Бесекерский В. А. и др. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления.— М.: Наука, 1972.
5. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования.— М.: Наука, 1975.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. Л. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.
7. Вавилов А. А. Частотные методы расчета нелинейных систем.— М.: Энергия, 1970.
8. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления.— М.: Энергия (ч. 2) 1966, (ч. 3) 1970.
9. Емельянов С. В., Уткин В. И. и др., Теория систем с переменной структурой.— М.: Наука, 1970.
10. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования.— М.: Машиностроение, 1974.
11. Иванов В. А., Медведев В. С., Чемоданов Б. К., Ющенко А. С. Математические основы теории автоматического регулирования, т. 1.— М.: Высшая школа, 1977.
12. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование.— М.: Машиностроение, 1978.
13. Козлов Ю. М., Юсупов Р. М. Бесписковые самонастраивающиеся системы.— М.: Наука, 1969.
14. Красовский А. А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем.— М.: Физматгиз, 1963.
15. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического управления.— М.: Гостехиздат, 1951.
16. Наумов Б. Н. Теория нелинейных автоматических систем.— М.: Наука, 1972.
17. Нетушил А. В. Теория автоматического регулирования ч. 2.— М.: Высшая школа, 1972.
18. Новоселов А. И. Автоматическое управление.— М.: Энергия, 1973.
19. Пальтов И. П. Качество процессов и синтез корректирующих устройств в нелинейных автоматических системах.— М.: Наука, 1975.

20. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю. и др. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления.— М.: Машиностроение, 1972.
21. Пономарев В. М., Литвинов А. П. и др. Основы автоматического регулирования и управления.— М.: Высшая школа, 1974.
22. Попов Е. П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах.— М.: Наука, 1973.
23. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления.— М.: Наука, 1978.
24. Пугачев В. С. Основы автоматического управления.— М.: Наука, 1968.
25. Солодовников В. В., Шрамко Л. С. Расчет и проектирование аналитических самонастраивающихся систем с эталонными моделями.— М.: Машиностроение, 1972.
26. Солодовников В. В. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования, кн. 3, части 1 и 2.— М.: Машиностроение, 1969.
27. Старикова М. В. Исследование автоматических систем с логическими управляющими устройствами.— М.: Машиностроение, 1978.
28. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение.— М.: Машиностроение, 1972.
29. Федоров С. М., Хитрик М. С. и др. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами.— М.: Наука, 1976.
30. Хлыпало Е. И. Нелинейные корректирующие устройства в автоматических системах.— М.: Энергия, 1973.
31. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем.— М.: Наука, 1977.
32. Цыпкин Я. З., Попков Ю. С. Теория нелинейных импульсных систем.— М.: Наука, 1973.
33. Чаки Ф. Современная теория управления.— М.: Мир, 1975.
34. Чинаев П. И. Самонастраивающиеся системы (справочник).— Киев: Наукова думка, 1969.
35. Шаталов А. С. Теория автоматического управления.— М.: Энергия, 1977.
36. Юревич Е. И. Теория автоматического управления.— М.: Энергия, 1969.
37. Основы проектирования следящих систем/Под ред. Н. А. Лакоты.— М.: Машиностроение, 1978.